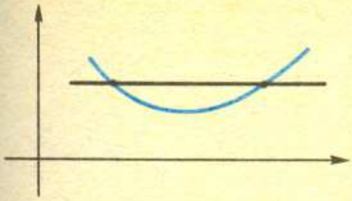

Funkcja $f:(a, b)\to \mathbf{R}$ nazywa się funkcją wypukłą, jeśli dla dowolnych $x, y \in (a, b)$ i $0 \leqslant t \leqslant 1$ zachodzi nierówność

$$f(t\cdot x+(1-t)\cdot y) \leqslant t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y). \tag{1}$$

Geometrycznie oznacza to, że dla dowolnej prostej przecinającej wykres funkcji w więcej niż jednym punkcie żadna część wykresu między punktami przecięcia nie leży nad tą prostą.

Dla funkcji wypukłej zachodzi nierówność Jensena:
Dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ oraz nieujemnych $t_1, t_2, \ldots, t_n$ spełniających warunek $t_1+\ldots+t_n = 1$ mamy

$$f(t_1\cdot x_1+\ldots+t_n\cdot x_n) \leqslant t_1\cdot f(x_1)+\ldots+t_n\cdot f(x_n). \tag{2}$$

Nierówności tej dowodzi się za pomocą indukcji matematycznej korzystając z nierówności (1).

Udowodnijmy teraz, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c mamy

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c} \leqslant a^3+b^3+c^3.$$

Dzieląc przez $a+b+c$ otrzymujemy nierówność równoważną

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^2 \leqslant \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c},$$

która wynika bezpośrednio z (2), jeśli podstawimy $f(x) = x^2$, $n = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $t_i = \dfrac{x_i}{a+b+c}$ $(i = 1, 2, 3)$. Trzeba jeszcze wiedzieć, że funkcja f jest wypukła. Można to łatwo sprawdzić korzystając z jednego z poniższych warunków.

(3) Jeśli druga pochodna funkcji (w przedziale) istnieje i jest nieujemna, to funkcja jest w tym przedziale wypukła.

(4) Jeśli w każdym punkcie $x \in (a, b)$ istnieją pochodne lewo- i prawostronne ($f'_-(x)$ i $f'_+(x)$), przy czym $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$ oraz pochodne te są funkcjami niemalejącymi, to funkcja jest w przedziale (a, b) wypukła.

(Funkcja wartość bezwzględna nie jest różniczkowalna, ale spełnia warunek (4).)

W naszym zadaniu $f''(x) \equiv 2 > 0$.

Uwaga: Jeśli druga pochodna jest dodatnia w przedziale, to funkcja jest ściśle wypukła, tzn. jeśli tylko nie wszystkie $x_1, \ldots, x_n$ są równe oraz $0 < t_i < 1$ $(i = 1,\ldots, n)$, to nierówność (2) jest ostra.

A oto zadania, w których można skorzystać z nierówności Jensena

1. Dowieść, że

$$\sqrt[44]{\mathrm{tg}1^\circ\cdot \mathrm{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot \mathrm{tg}44^\circ} < \sqrt{2}-1 < \frac{1}{44}(\mathrm{tg}1^\circ+\ldots+\mathrm{tg}44^\circ).$$

(I Zawody Austriacko-Polskie, 1978r.)

2. Udowodnić, że dla każdych liczb dodatnich p i q spełniających warunek $p+q = 1$ zachodzi nierówność

$$p\log p+q\log q \geqslant -\log 2.$$

(2 — I — XXII)

3. Udowodnić, że jeśli liczby $x, y, z > -1$ spełniają warunek $x+y+z = 1$, to

$$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z} \leqslant \frac{3}{2}$$

(2 — I — XXXVII)

4. W okrąg k wpisany jest trójkąt ABC. Na okręgu k wybrano takie punkty A', B', C', że proste AA', BB', CC' zawierają środkowe trójkąta ABC. Wykazać, że pole trójkąta $A'B'C'$ jest nie mniejsze od pola trójkąta ABC.

(3 — I — XXXI)

dr Jerzy RYLL