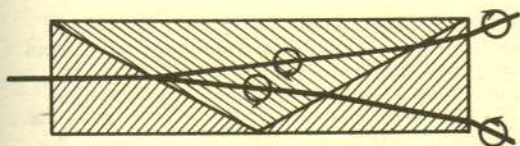


**1** Okręgi powstałe przez przecięcia sfery płaszczyznami przechodzącymi przez wierzchołek opisanego na sferze stożka przecinają okrąg styczności stożka ze sferą pod kątami prostymi.

**2** W kwestii bryłek kamiennych i metalicznych spadających niekiedy z nieba ustalono kilka lat temu następującą terminologię. Bryłka lecąca poprzez Układ Słoneczny czy przestrzeń międzygwiazdową nazywa się ciałem meteorowym lub meteoroidem. Kiedy wpadnie do atmosfery ziemskiej i rozżarzy się, daje zjawisko zwane meteorom. Wreszcie jeżeli przetrwa przelot przez atmosferę i upadnie na ziemię, to nazywa się meteoritem. Bolid to szczególnie efektowny meteor. Zazwyczaj zjawisko meteoru wywołuje bryłkę o masie rzędu 1 g, bolidu zaś — 10 razy masywniejsza.

**3** W 1811 r. Arago odkrył osobliwe własności optyczne kwarcu. Promienie spolaryzowane kołowo prawo- i lewoskrętnie rozchodzą się wzdłuż osi optycznych kwarcu z różnymi prędkościami, a więc różne są dla nich współczynniki załamania. Wykorzystano ten fakt przy budowie tzw. kostki Fresnela. Kostka składa się z trzech pryzmatów (rysunek) wyciętych z kwarcu prawo- i lewoskrętnego (dwie odmiany kwarcu — jedna jest odbiciem lustrzanym drugiej). Promień liniowo spolaryzowanego światła ulega przy przejściu przez kostkę rozszczepieniu na dwa promienie spolaryzowane kołowo w przeciwnych kierunkach.



**4** Ile kwadratów o boku jeden można umieścić w kwadracie  $K$  o boku 100000,1 tak, by nie zachodziły na siebie? 10 miliardów kwadratów jednostkowych ułożonych równo wypełnia kwadrat o boku 100000. Czy można wyobrazić sobie gęstsze upakowanie kwadratu  $K$ ? Dopiero niedawno P. Erdős, R. L. Graham i H. Montgomery pokazali, że jeśli bok  $a$  kwadratu jest dostatecznie duży, to można w tym kwadracie umieścić więcej niż  $a^2 - a^{(3-\sqrt{3})/2}$  kwadratów jednostkowych. Tak więc w kwadracie  $K$  można upchnąć jeszcze ponad 18500 małych kwadratów.

**5** W gwiazdozbiornie Wężownika leży gwiazda oznaczona jako Van Biesbroeck 8 (VB8) oddalona od nas o 21 lat świetlnych. Jest to układ podwójny. Jaśniejszy składnik VB8A jest małowasywną czerwoną gwiazdą typu M. Natomiast VB8B obiegający swojego towarzysza po orbicie o promieniu 6 j.a. nie jest gwiazdą. Jego masa jest około 10 razy większa od masy Jowisza, jasność wynosi 0,000 03 jasności Słońca, a temperatura 1400 K — jest to tzw. brązowy karzeł. Aby być gwiazdą, VB8B musiałby mieć masę około 10 razy większą. Jest to pierwszy poza Układem Słonecznym znany niegwiazdowy obiekt obiegający swoją gwiazdę „macierzystą”. Kandydatem na gwiazdę z planetą jest również VB10 — w tym przypadku podejrzewa się, że niewidoczny towarzysz może mieć masę bliską masie Jowisza.

**6** Od kilkudziesięciu lat znane są trzy typy promieniotwórczości jądrowej — przemiany  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Ostatnio odkryto dwa nowe typy promieniotwórczości. Okazało się, że w niektórych jądrach neutronowodeficytowych emisja protonu może wyprzedzić przemianę  $\beta^+$  (zamiana protonu na neutron z emisją pozytonu —  $e^+$ ). Zjawisko takie zaobserwowano w jądrach  $^{151}\text{Lu}$  i  $^{147}\text{Tm}$  w roku 1982. Natomiast obserwowany rozpad jądra  $^{224}\text{Ra}$  na  $^{210}\text{Pb}$  i  $^{14}\text{C}$  ma charakter podobny do przemiany  $\alpha$ .

**7** Supernowa nie jest wyjątkowo jasną gwiazdą nową, inaczej mówiąc nie jest to wyjątkowo potężny wybuch gwiazdy nowej. Różnica między tymi dwoma typami gwiazd jest nie tylko w energii wybuchu — wybuchy ich spowodowane są przez zupełnie różne mechanizmy. Wybuch gwiazdy nowej jest eksplozją w cienkiej zewnętrznej jej warstwie — samą gwiazdą jest biały karzeł będący ponadto składnikiem układu podwójnego. W czasie wybuchu zostaje wypromieniowana energia rzędu  $10^{38}$  J i zjawisko to jest powtarzalne. Natomiast jako supernowa gwiazda może zabłysnąć tylko raz. Wybuch w jej wnętrzu wyzwala energię rzędu  $10^{43}$  J i gwiazda ulega albo całkowitemu zniszczeniu, albo pozostaje po niej gwiazda neutronowa lub, być może, czarna dziura.

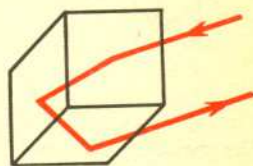
**8** Najmniej ścian, najmniej wierzchołków i najmniej krawędzi spośród wszystkich wielościanów ma czworościan. Ich liczba to, odpowiednio, 4, 4, 6. Istnieje wielościan mający dokładnie  $n$  ścian dla każdego  $n \geq 4$ . Dla każdego  $n \geq 4$  istnieje wielościan mający dokładnie  $n$  wierzchołków. Nie jest natomiast prawdą, że dla każdego  $n \geq 6$  istnieje wielościan mający dokładnie  $n$  krawędzi. Nie ma mianowicie wielościanu o siedmiu krawędziach.

**9** Jeżeli warunki, w których znajduje się układ będący początkowo w stanie równowagi, ulegają zmianie, to stan równowagi będzie przesunął się w takim kierunku, aby doprowadzić do przywrócenia warunków początkowych, o ile takie przesunięcie jest możliwe. Powyższe twierdzenie zwane „regulą przekory” lub Zasadą le Chateliera-Brauna określa kierunek przebiegu procesów w układach wytraconych ze stanu równowagi. Wynika z niego między innymi, że wydajność reakcji, której towarzyszy wydzielanie ciepła (np. reakcji syntezy amoniaku z wodoru i azotu w obecności katalizatorów) rośnie z obniżaniem temperatury. Przypadkiem szczególnym jest również tzw. reguła Lenza, w myśl której indukowane w obwodzie pole magnetyczne „przeciwdziała” wywołującym je zmianom zewnętrznego pola magnetycznego.

**10** Dowolny punkt okręgu tóczącego się po prostej określa między dwoma dotknięciami prostej krzywą o długości równej ośmiu promieniom tego okręgu.

**11** Julian Tuwim twierdził, że najciekawsze w astronomii jest nie to, iż znamy np. odległość jakiejś gwiazdy, lecz to, że znamy jej nazwę. Okazuje się, że to jeszcze nic — znamy nawet nazwy obiektów nie istniejących. W Układzie Słonecznym mamy nazwane trzy nie istniejące planety. Wulkan byłby obiektem obiegającym Słońce wewnątrz orbity Merkurego, a na jego istnienie miały wskazywać pewne zaburzenia ruchu Merkurego. Faeton miał być planetą, której rozerwanie między orbitami Marsa i Jowisza dało początek planetoidom. Wreszcie Transpluton jest domniemanym obiektem obiegającym Słońce poza orbitą Plutona. Jak dotychczas, astronomia traktuje te obiekty jako co najwyżej hipotetyczne.

**12** Naroże ustawione z trzech zwierciadeł (lustrami do wewnątrz) odbija światło w ten sposób, że każdy promień wpadający do naroża opuszcza je biegnąc po równoległej (być może tej samej) prostej tylko wtedy, gdy kąty między zwierciadłami są proste.



**13** Jeśli bryła ma skończoną liczbę osi symetrii, to liczba ta jest nieparzysta.



**14** Odkrycia negatywne też są ważne. Obecnie największe znaczenie światopoglądowe ma chyba niewykrucie organizmów żywych na Marsie i niewykrucie jakichkolwiek przejawów działalności rozumnej we Wszechświecie. Wynika z tego (w każdym razie na dziś), że poza Ziemią życia organicznego w Układzie Słonecznym nie ma, oraz że w promieniu jakichś kilkudziesięciu parseków wokół Słońca nie ma też istot rozumnych.

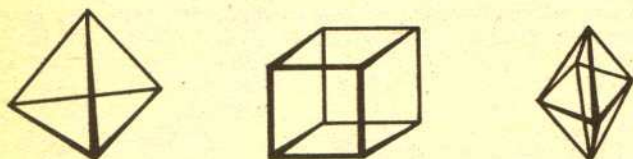
**15** Przekrój poprzeczny promienia świetlnego biegnącego w próżni rośnie. Na przykład plamka światła z lasera umieszczonego na Ziemi ma na Księżycu średnicę kilku metrów. W ośrodku materialnym promień laserowy zamiast rozbiegać się może ulec zogniskowaniu, aż do „przebiecia”. Takie „samoogniskowanie” występuje wtedy, gdy obecność silnego pola elektromagnetycznego powoduje wzrost współczynnika załamania ośrodka. Obszar zajmowany przez wiązkę światła ma w tym przypadku większy współczynnik załamania niż otoczenie, co powoduje, że zewnętrzne części wiązki załamują się ku jej osi.

**16** „Gdy zmieszać ze sobą 50 cm<sup>3</sup> wody i 50 cm<sup>3</sup> alkoholu etylowego, uzyskujemy tylko 96,3 cm<sup>3</sup> wódki, co łatwo sprawdzić w wyskalowanym naczyniu”.  
(Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna*, część I)

**17** Lustra teleskopowe są prawdopodobnie najbardziej precyzyjnymi produktami ludzkiej technologii. Mamy tu na myśli dokładność wykonania w stosunku do rozmiarów. Mianowicie, aby lustro dawało prawidłowy obraz, musi być wypolerowane z dokładnością nie gorszą niż 1/4 fali świetlnej, a praktycznie osiąga się 1/10 fali, czyli około 0,05 μm. Zważywszy, że lustra wielkich teleskopów mają średnice rzędu 5 m, otrzymujemy precyzję wykonania rzędu 10<sup>-8</sup>. Tyle w centymetrach wynosi średnica atomu.

**18** Wśród zjawisk przewidywanych przez ogólną teorię względności najczęściej wymienia się występowanie ugięcia promieni świetlnych w polu grawitacyjnym oraz istnienie czarnych dziur. Oba zjawiska zostały jednak przewidziane na podstawie korpuskularnej teorii światła (teoria Newtona) ponad sto lat przed sformulowaniem teorii względności. W 1800 roku Laplace wysunął hipotezę o możliwości istnienia ciał wywołujących tak silne pola grawitacyjne, że nawet światło nie może opuścić ich powierzchni („prędkość ucieczki” przewyższa prędkość światła). W rok później Soldner obliczył kąt, o który powinny odchylić się promienie świetlne od odległych gwiazd przechodząc w pobliżu Słońca. Jego wynik był o połowę mniejszy od przewidywanego przez ogólną teorię względności (i zmierzono doświadczalnie).

**19** Jeśli chcemy zrobić z drutu model krawędzi czworościanu (każda krawędź jest pojedynczym drutem), to musimy mieć drut przynajmniej w dwóch kawałkach. Aby zrobić taki model krawędzi sześciianu, trzeba mieć drut w co najmniej czterech kawałkach. Natomiast model krawędzi ośmiościanu może być wykonany z jednego kawałka drutu.

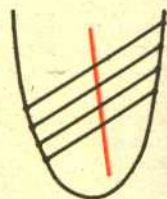


**20** Najstarszym instrumentem astronomicznym jest gnomon. Urządzenie takie to pionowy pręt ustawiony na poziomej podstawie. Według długości i kierunku jego cienia wyznaczano wysokość i azymut Słońca. W Starożytności gnomon służył również za najprostszy zegar słoneczny. Jego pozioma podstawa była zaopatrzona w znaki oznaczające kolejne godziny, a cień pręta stanowił wskazówkę zegara. Gnomony budowano w Egipcie, Babilonii, Chinach i w Indiach od około 3 tys. lat p.n.e.

**21** Oddziaływanie zewnętrznego pola magnetycznego lub elektrostatycznego na ciało może powodować zmianę kształtu lub objętości (magnetostrykcja, elektrostrykcja, zjawisko piezoelektryczne). Zachodzą również zjawiska odwrotne — np. odkształcenie kryształu piezoelektrycznego powoduje indukowanie się ładunków na jego powierzchni.

**22** Według kalendarza juliańskiego rok miał średnio 365,25 dni (rok zwykły liczył 365, a co czwarty — przestępny 366 dni). Ponieważ rok średni słoneczny ma dokładniej 365,242 198 78 dni, rozbieżność z biegiem czasu narastała i od czasów Juliusza Cezara do XVI wieku osiągnęła 10 dni. Reforma kalendarza dokonana przez papieża Grzegorza XIII wprowadziła dokładniejszą i panującą do dziś rachubę czasu (kalendarz gregoriański), aby zaś nadrobić owe 10 dni, ustalono, że po 4 X 1582 nastąpi od razu -15 X. Tak więc w historii powszechnej formalnie brak jest dziesięciu dat!

**23** Środki wszystkich równoległych cięciw paraboli leżą na jednej prostej (dla różnych kierunków cięciw są to na ogół różne proste). Podobną własność mają równoległe cięciwy elips i hiperbol.



**24** Zasadniczą rolę w zjawisku nadprzewodnictwa odgrywa oddziaływanie elektronów za pośrednictwem sieci krystalicznej. Świadczy o tym między innymi tzw. efekt izotopowy: temperatura przejścia w stan nadprzewodzący jest tym wyższa, im mniejsza jest masa jonów sieci. Na przykład dla izotopu rtęci <sup>203</sup>Hg  $T_k = 4,126$  K, a dla <sup>199</sup>Hg  $T_k = 4,177$  K. W hipotetycznych nadprzewodzących makrocząsteczkach organicznych rolę jonów metalu mają odgrywać cząsteczki bocznych łańcuchów, które polaryzują się pod wpływem pola elektrycznego elektronu biegnącego wzdłuż makrocząsteczki. Przemieszczającymi się obiektami są tutaj nie jony, jak to ma miejsce w metalu, lecz elektrony, których masa jest sto tysięcy razy mniejsza od przeciętnej masy jonu. Zgodnie z prawidłowością charakteryzującą efekt izotopowy temperatura przejścia dla takiej makrocząsteczki powinna być znacznie wyższa od temperatury przejścia dla typowego nadprzewodnika metalicznego. Oszacowania dają wartość  $T_k \approx 2000$  K.

**25** Do przybliżonego obliczania całek stosuje się często wzór Simpsona. Otóż, aby znaleźć całkę funkcji  $f$  na przedziale  $\langle a, b \rangle$ , dzielimy ten przedział na  $n$  równych części. W każdym przedziałiku zastępujemy funkcję  $f$  przez trójmian kwadratowy przyjmujący te same wartości co funkcja  $f$  w końcach i środku tego przedziałiku. Obliczamy całki tych trójmianów i dodajemy. Rachunkowy wzór jest prosty:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [f(a) + f(b) + 2(f(x_2) + \dots + f(x_{2n-2})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1}))],$$

gdzie  $x_k = a + \frac{b-a}{2n} \cdot k$  dla  $k = 1, 2, \dots, 2n-1$ .

Wzór Simpsona daje bardzo dobre przybliżenie całki już dla małych wartości  $n$ . Na przykład obliczmy  $\pi$  ze wzoru

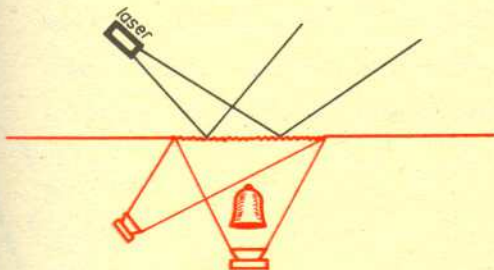
$$\pi = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctg 1 = 4 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Otrzymujemy dla  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  następujące przybliżenia liczby  $\pi$ :  
3,133 ... ; 3,141568 ; 3,14159178; 3,141592502; 3,141592614.  
Przypomnijmy, że  $\pi = 3,141592653$  ...



**26** Pluton został odkryty w 1930 r. na podstawie obliczeń wykonanych przez Percivala Lowella, który określił jego położenie przeanalizowawszy spowodowane przez niego perturbacje w ruchu Urana. Mamy tu jednak dwie niejasne sprawy: dużo później okazało się, że Pluton ma masę 3000 razy mniejszą, niż przyjął Lowell oraz odkryty został dość daleko (o kilka stopni) od miejsca obliczonego. Powody te usprawiedliwiają trwające do dziś poszukiwania pozaplutonowej planety o jakiejś znaczniejszej masie. Zdaniem niektórych astronomów Lowell odkrył w rzeczywistości jądro Galaktyki. Leży ono akurat po przeciwnej stronie nieba (w Strzelcu) niż miejsce odkrycia Plutona (w Bliźniętach), ale rzecz w tym, że pod pewnymi względami jego działanie na planety z kierunku Strzelca jest takie samo jak działanie innej masy z kierunku Bliźniąt (wspomnijmy np. przyplwy oceanów wywoływane przez pojedynczy Księżyc po obu stronach Ziemi). Gdyby przyjąć takie tłumaczenie, to odkrycie Plutona należałoby uznać po prostu za dzieło przypadku!

**27** Hologram jest zapisem obrazu interferencyjnego. Interferują dwie fale: rozproszona na „holografowanym” przedmiocie i spójna z nią fala niezaburzona. Nietypowy hologram może powstać na powierzchni wody. Na zanurzony w wodzie przedmiot kieruje się dwa generatory fal akustycznych. Jedna z fal „oświetla” przedmiot i interferuje z drugą. Hologram tworzą zmarszczenia na powierzchni wody. Odбите od wody światło laserowe rekonstruuje obraz.

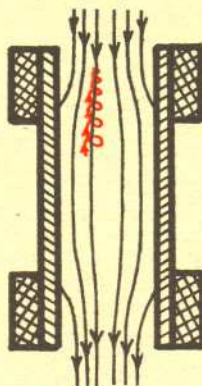


**28** Nikt nie wie, jakim cudem Jonatan Swift (1667—1745) w swojej powieści *Podróże Guliwera* mógł podać tak dokładne dane dotyczące satelitów Marsa, skoro naprawdę odkrył je A. Hall dopiero w 1877 r.

**29** Obniżenie ciśnienia wewnątrz cieczy poniżej pewnej wartości krytycznej powoduje powstawanie w niej pęcherzyków pary lub rozpuszczonego w cieczy gazu — zjawisko to nazywa się kawitacją. W idealnie jednorodnej cieczy ciśnienie krytyczne byłoby znacznie niższe od ciśnienia pary nasyconej, jednak występujące zwykle zanieczyszczenia cieczy i powierzchni ciała opływanych powodują, że praktycznie wartości ciśnienia krytycznego i ciśnienia pary nasyconej są równe. Mechaniczne oddziaływanie powstających i zanikających pęcherzyków pary i gazu na powierzchni opływanych ciał powoduje ich niszczenie (korozja kawitacyjna), co przejawia się szczególnie silnie na brzegach turbin i śrub okrętowych.

**30** Wenus (zwana też: Gwiazdą Poranną, Jutrzenką, Fosforos, Lucifer, Gwiazdą Wieczorną, Hesperia, Hesperos) stanowi od wieków obiekt największych zainteresowań astronomów, głównie z powodu swej jasności ustępującej jedynie jasności Słońca i Księżyca. Jednak aż do 1964 roku astronomowie nie mogli uporać się z określeniem długości trwania doby na tej planecie. Badania wykonywane różnymi metodami dawały wartości w zakresie od 22 godzin do 225 dob ziemskich. Dopiero użycie potężnego radioteleskopu w Arecibo pozwoliło ustalić, że doba wenusjańska trwa 243,2 doby ziemskiej. Wenus jest najwolniej obracającą się planetą Układu Słonecznego, a obrót jej następuje w kierunku wstecznym. Własność tę ma, oprócz Wenus, tylko Uran.

**31** Zainicjowanie reakcji termojądrowej wymaga podgrzania mieszaniny deuteru i trytu do temperatury kilkudziesięciu milionów stopni. Takiej gorącej plazmy składającej się z jąder deuteru i trytu oraz elektronów nie można oczywiście utrzymać w żadnym naczyniu. Ponieważ jednak cząstki te są naładowane, można na nie oddziaływać za pomocą silnych pól magnetycznych.



Rysunek przedstawia tzw. butelkę magnetyczną służącą do utrzymania w ograniczonym obszarze niezbyt gorącej plazmy. Na końcach solenoidu pole magnetyczne silnie rośnie, co osiąga się za pomocą dodatkowych nadprzewodzących cewek. Tory cząstek w tak ukształtowanym polu są liniami śrubowymi o malejącej średnicy. Przy zbliżaniu się do obszaru silnego pola energia kinetyczna ruchu wzdłuż osi butelki maleje, a ruchu w płaszczyźnie prostopadłej — rośnie. Gdy całkowita energia nie jest zbyt duża, po pewnym czasie cząstka zatrzymuje się i odbija z powrotem do wnętrza butelki.

**32** Ważną klasą rozkładów prawdopodobieństwa na prostej są rozkłady ciągłe; dystrybuenta takiego

rozkładu jest postaci  $F(x) = \int_{-\infty}^x g(x)dx$ , gdzie  $g$  jest funkcją całkowalną, zwaną gęstością rozkładu. Np. dobrze znany rozkład normalny ma gęstość  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

Rozkład ciągły musi mieć ciągłą dystrybuentę. Jednak ciągłość dystrybuenty nie implikuje istnienia gęstości. Oto jedna z możliwych konstrukcji takiego rozkładu osobliwego. Weźmy zbiór Cantora na odcinku  $\langle 0,1 \rangle$ . Powstaje on przez podział odcinka na trzy równe części i usunięcie środkowego odcinka otwartego. Tę samą operację wykonujemy na dwóch pozostałych odcinkach, później na czterech pozostałych itd. To,

co zostanie, jest zbiorem liczb postaci  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon_n}{3^n}$ , gdzie  $\epsilon_n \in \{0,1\}$ .

Funkcja  $F$ , która liczbie tej postaci przyporządkowuje liczbę

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{2^n}$ , jest ciągła i niemalejąca. Zauważmy, że

$F\left(\frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$ , podobnie na końcach wszystkich usuniętych

odcinków  $F$  przyjmuje tę samą wartość. Daje to możliwość przedłużenia  $F$  na cały odcinek  $\langle 0,1 \rangle$ : na każdym usuniętym odcinku  $F$  będzie przyjmować taką wartość, jak na jego końcach. Pozostaje jeszcze przyjąć  $F(x) = 0$  dla  $x < 0$  i  $F(x) = 1$  dla  $x > 1$ . Funkcja  $F$  jest teraz niemalejąca, ciągła,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ ,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ , zatem jest dystrybuentą pewnego rozkładu.

Gęstość jednak nie istnieje: musiałaby być zerem na przedziałach  $(-\infty, 0)$ ,  $(1, \infty)$ , a także na wszystkich przedziałach usuniętych przy konstrukcji zbioru Cantora. Te ostatnie mają długości

dające w sumie  $1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 \right)$ . Zatem

gęstość mogłaby być różna od zera na zbiorze miary zero — całka po dowolnym przedziale byłaby też zerem, skąd  $F \equiv 0$  — sprzeczność.

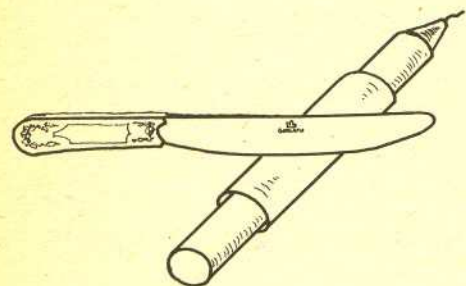
**33** Zmianom stanu oscylacyjnego molekuly towarzyszy wypromieniowanie lub pochłonięcie fotonu o energii  $10^{-1} - 10^{-3}$  eV. Jeszcze mniejsze energie ( $10^{-3} - 10^{-5}$  eV) towarzyszą zmianom stanu rotacyjnego molekuly. Tak małe energie odpowiadają promieniowaniu podczerwemu. Może się jednak zdarzyć, że przejściu elektronowemu (energii rzędu kilku eV) towarzyszy zmiana stanu oscylacyjnego lub rotacyjnego. W widmie promieniowania rozproszonego przez cząsteczkę pojawiają się wówczas linie o częstości większej lub mniejszej od częstości padającej wiązki. Zjawisko takie w 1923 roku po raz pierwszy zaobserwowali Ramanathan i Raman badając światło rozproszone na cząsteczkach benzolu.



**34** Nie tylko planety mają swoje księżyce, nie tylko gwiazdy mają swoje planety, ale i galaktyki mają swoje satelity w postaci mniejszych galaktyk. Satelitami naszej Galaktyki są Wielki i Mały Obłok Magellana. To właśnie członkowie wyprawy Ferdynanda Magellana dookoła świata jako pierwsi Europejczycy zobaczyli te dwa obiekty, a że są one zbiorowiskami gwiazd, okazało się oczywiście dużo później. Wielki Obłok Magellana leży w gwiazdozbiornie Złotej Ryby (w odległości około 50 kpc), Mały zaś w Tukanie (w odległości 60 kpc) — są więc z Polski niewidoczne. Można je u nas oglądać tylko w planetarium. Mały Obłok Magellana składa się z dwóch części leżących (z naszego punktu widzenia) jedna za drugą: jednej — tej właściwej i drugiej — Miniobłoku Magellana. Obie części są odległe od siebie o 7 kpc i rozbiegają się z prędkością 30 km/s. Mały Obłok Magellana prawdopodobnie został rozerwany 200 mln lat temu, kiedy to niemal zderzył się z Wielkim Obłokiem.

**35** Grunt w cieplarni ogrzewany jest światłem słonecznym, a więc głównie tzw. widzialnym, swobodnie przepuszczanym przez szkło, a wyświeca swą energię w zakresie podczerwonym, dla którego to samo szkło jest nieprzezroczyste. W rezultacie w cieplarni ustala się równowaga przy temperaturze wyższej niż poza nią. Cieplarnią na skalę kosmiczną jest Wenus. Tam rolę szklanego dachu pełni atmosfera składająca się prawie wyłącznie z dwutlenku węgla, a równowaga ustaliła się na poziomie około 470°C. Temperatura taka została tam po raz pierwszy bezpośrednio zmierzona w 1970 r. przez sondę Wenera 7.

**36** Jeśli świecę owiniemy kartką papieru, a następnie świecę (i kartkę) przetniemy nożem, to obie części kartki będą się kończyć sinusoidami.



**37** Zbiór punktów płaszczyzny, będący sumą mnogościową wszystkich okręgów o równaniach:  $x^2 + y^2 = n^2$  dla  $n = 1, 2, \dots$ , ma przekrój przeliczalny z każdą prostą na płaszczyźnie. Nie można w sposób równie efektywny wskazać zbioru płaskiego, który ma niepusty, ale co najwyżej dwuelementowy przekrój z każdą linią prostą. Istnienie takiego zbioru wynika z aksjomatu wyboru — jak udowodnił w 1914 roku S. Mazurkiewicz, przy założeniu tego aksjomatu mnogościowego istnieje zbiór na płaszczyźnie, mający dokładnie dwa punkty wspólne z każdą prostą.

**38** Zgodnie z twierdzeniem Earnshawa ładunek elektryczny nie może być utrzymany w stabilnym położeniu równowagi wyłącznie siłami elektrostatycznymi. Tak więc np. dla układu ładunków poruszających się we wnętrzu kuli stany równowagi odpowiadają rozmieszczeniu ładunków na jej powierzchni. Problem znalezienia stabilnych konfiguracji  $N$  ładunków na powierzchni kuli nie został dotychczas rozwiązany dla dowolnego  $N$ . Dla  $N$  równych liczbie wierzchołków wielościanów foremnych stwierdzono, że czworościan ( $N = 4$ ), ośmiościan ( $N = 6$ ) i dwudziestościan ( $N = 12$ ) wyznaczają konfiguracje ładunków o minimalnej energii, natomiast sześciąt ( $N = 8$ ) i dwunastościan ( $N = 20$ ) — nie. Dla ładunków na powierzchni dysku o promieniu  $R = 1$  dla  $N < 12$  minimalną energię ma układ z ładunkami równomiernie rozmieszczonymi na brzegu, dla  $12 \leq N \leq 16$  najniższa energia odpowiada umieszczeniu jednego ładunku w środku i pozostałych na brzegu, przy  $N = 17$  najniższą energię ma konfiguracja z dwoma ładunkami w odległości  $r = 0,31$  od środka i pozostałymi na brzegu. Dla  $N = 29$  minimalna energia odpowiada sześciu ładunkom w odległości  $r = 0,49$  i dwudziestu trzem na brzegu, a dla  $N = 30$  — jednemu ładunkowi w środku, sześciu w odległości  $r = 0,53$  i dwudziestu trzem na brzegu. W granicy  $N \rightarrow \infty$  powierzchniowa gęstość ładunku wynosi  $\sigma(r) = 1/2\pi R(R^2 - r^2)^{1/2}$ .

**39** Nitinol to stop niklu z tytanem o mniej więcej równych proporcjach obu składników. Trwale odkształcony przedmiot z nitinolu (deformacja nie może jednak przekraczać 10%) po ogrzaniu powraca do swego pierwotnego kształtu. Na przykład płaska blaszka o grubości 2 mm wygięta w kółko o promieniu 10 mm „pamięta” swój kształt i po ogrzaniu znów staje się płaska. Aby zapamiętać nowy kształt, powiedzmy kółka, należy je ogrzewać nie pozwalając na rozprostowanie. Naprężenia, które przy tym powstają, mogą osiągnąć 10 tysięcy atmosfer. Po przekroczeniu pewnej wartości naprężeń stop „zapomina” początkowy kształt. Nitinol można wykorzystać do budowy kosmicznego radioteleskopu. Na orbitę wystarczy wynieść kłębek cienkiego drutu. Po podgrzaniu drut rozwinię się na przykład w czaszę o kilometrowej średnicy. Przez niewielką zmianę składu stopu można w dużym zakresie regulować temperatury zapamiętywania kształtu. Obecnie stosuje się nitinol do łączenia złamanych kości (przypominanie kształtu następuje w temperaturze ciała), do nitowania zamkniętych profili kadłuba samolotu, do łączenia rur tam, gdzie nie jest możliwe spawanie itp.

**40** Zadanie, które śniło się po nocach Tuwimowi, (ze zbioru zadań wydanego w 1906 roku). „Szerokość siedmiokopiejkowej marki równa się

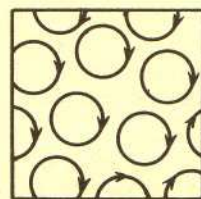
$$4 \frac{37}{45} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{8}{9} + \frac{17}{18} + \frac{35}{36}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}$$

jej długości, która wynosi  $\frac{9}{10}$  cala. Za jaką sumę trzeba kupić marek pocztowych, aby wylepić nimi ściany pokoju, którego długość równa się 5 arszynom, szerokość  $4\frac{3}{4}$ , a wysokość  $5\frac{6}{7}$  arszyna?”

**41** Elektron przewodnictwa poruszają się swobodnie wewnątrz metalu. W zewnętrznym polu magnetycznym ich torę tworzą orbity kołowe prostopadłe do kierunku wektora  $B$ . Każdy z tak powstałych momentów magnetycznych (każda z orbit tworzy zamknięty obwód z „prądem” skierowany jest przeciwnie do kierunku pola, a więc wypadkowe pole magnetyczne powinno być mniejsze od pola zewnętrznego.

Jednak, jak wykazał Niels Bohr w 1911 roku, istniejące w pobliżu granicy metalu (rysunek) nie zamknięte orbity odpowiadają wypadkowemu prądowi o momencie magnetycznym dokładnie kompensującym momenty pochodzące od orbit zamkniętych, jeśli ruch elektronów opisywać za pomocą mechaniki klasycznej. Dopiero uwzględnienie zjawisk kwantowych pozwala opisać diamagnetyzm (osłabianie pola magnetycznego) swobodnych ładunków.

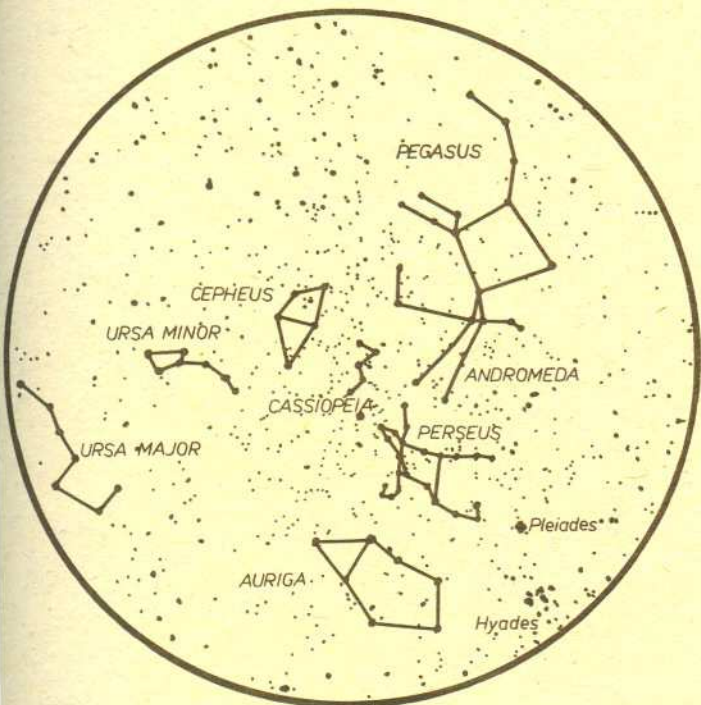


**42** Hipoteza o istnieniu ciemnych plam na odległych gwiazdach liczy sobie tak naprawdę czterysta lat. Po raz pierwszy została zaproponowana w 1596 roku przez Fabriciusa, który chciał w ten sposób wyjaśnić zaobserwowaną zmienność gwiazdy *o Ceti* (Mira). Obecnie znamy wiele gwiazd z plamami, jednak żadna z nich nie przypomina *o Ceti*. Obiekty typu Mira są bowiem gwiazdami pulsującymi. Właśnie pulsacje o okresach od 100 do 1000 dni są przyczyną zmienności blasku (z amplitudą średnio 4,5 wielkości gwiazdowej) tych czerwonych olbrzymów.

**43** Pięciokąt jest jedynym wielokątem mającym tyle samo boków co przekątnych. Graniastosłup o podstawie sześciokątnej ma tyle samo krawędzi co przekątnych nie leżących w żadnej ze ścian. Czy są jeszcze inne takie wielościany?



**44** Historia pokazów nieba na seansach w planetariach sięga lat dwudziestych naszego wieku. Urządzenia tradycyjne wyposażone są zwykle w aparaty, które mogą poruszać się wokół dwóch osi: osi świata (demonstracja ruchów gwiazd) i osi prostopadłej do płaszczyzny ekliptyki (demonstracja ruchów planet). W dzisiejszych czasach zastosowanie najnowocześniejszej techniki, przede wszystkim komputerów, pozwala znacznie uatrakcyjnić tego rodzaju seanse. Można oglądać obrazy nieba zarówno z dalekiej przeszłości, jak również wybiegać w przyszłość. Na podstawie znajomości ruchów własnych gwiazd przewiduje się, jakim zmianom ulegają ich położenia, jak zmieniają się kształty konstelacji i w ten sposób dzięki błyskawicznemu przetworzonemu przez komputer obrazowi poruszamy się w czasie. Podobnie, w „ponadświatlną” szybkością można wybierać się w podróż w przestrzeni aż do miejsc odległych o ponad 600 lat świetlnych od Układu Słonecznego. Rysunek pokazuje schematycznie, jak przedstawia się obraz nieba widzianego z najbliższej gwiazdy —  $\alpha$  Centauri. Znane nam dobrze konstelacje okołobiegunowe wyglądają podobnie jak z Ziemi. Słońce widziane z tego miejsca położone jest między gwiazdozbiorami Kasjopei i Perseusza.



**45** Jak wiadomo, można przejść po kruchym lodzie, jeśli tylko zrobi się to dostatecznie szybko. W związku z tym Piotr Kapica zaproponował następujące zadanie: oszacować graniczną prędkość, przy której człowiek może chodzić (biegać) po powierzchni wody (uwzględnić napięcie powierzchniowe).

**46** Znajomość paralaks rocznych gwiazd pozwala na wyznaczanie ich odległości. W metodzie tej bazę stanowi wokółsłoneczna orbita Ziemi, a o odległościach obiektów wnioskuje się na podstawie kątowych zmian ich położenia na sferze niebieskiej. Wyznaczenie paralaks możliwe jest jedynie dla gwiazd najbliższych, bowiem w przypadku odległych — wielkości te są tak małe, że błędy obserwacji przewyższają wartości samych paralaks. Gwiazdą położoną najbliżej Słońca jest *Proxima Centauri*, widoczna na południowej półkuli nieba. Jej paralaksa jest równa  $0,762''$ , co odpowiada odległości 4,3 lat świetlnych. Rzeczywisty blask tej gwiazdy stanowi zaledwie 0,000072 blasku Słońca. Jest ona tzw. czerwonym karłem typu M5 i gwiazdą rozblyskową; w wyniku rozblysków jej jasność niekiedy wzrasta o 1 mag w czasie rzędu minut. Z Ziemi widoczna jest jako zupełnie słaby obiekt, 10,7 wielkości gwiazdowej. Nie jest więc dostępna obserwacjom nieuzbrojonym okiem. Pozostałe dwa składniki układu potrójnego (zwane Toliman A i Toliman B), do którego należy *Proxima Centauri*, znajdują się już prawie miesiąc świetlny dalej od Słońca. Są to znacznie jaśniejsze gwiazdy, tak że z Ziemi widzimy je jako obiekty 0,32 i 1,72 wielkości gwiazdowej.

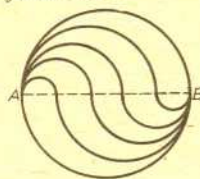
**47** Jaką mamy szansę wskazania największej spośród  $n$  liczb naturalnych podawanych nam kolejno, jeśli możemy wskazać tylko na liczbę aktualnie nam podawaną?

Otóż należy przepuścić pierwsze  $\frac{n}{e}$  liczb ( $e \approx 2,718$ ) wybierając z nich największą, a następnie wskazać pierwszą z podawanych liczb większą od wybranej lub gdy takiej nie ma, nie wskazać żadnej. Prawdopodobieństwo tego, że wskazaliśmy największą liczbę, zbiega, przy  $n \rightarrow \infty$ , do  $1/e \approx 0,37$ .

**48** Wskutek działania Księżyca i Słońca na Ziemię jej oś obrotu nie zachowuje niezmiennego kierunku w przestrzeni, lecz opisuje stożek, a północny biegun świata opisuje koło o środku w pobliżu gwiazdy  $\varphi$  Smoka i promieniu  $23^{\circ}5'$  w ciągu 26 000 lat. Jest to zjawisko precesji. W rezultacie np. za 12 000 lat biegun znajdzie się niedaleko Węgi ( $\alpha$  Lutni) i zarazem o około  $50^{\circ}$  od Gwiazdy Polarnej. Czy wtedy nadal ma się ona nazywać „Polarna”?

**49** Zetknięcie dokładnie oczyszczonych powierzchni dwu różnych metali prowadzi do powstania na złączu skoku potencjału. Wartość tego napięcia zależy od temperatury i rodzaju przewodników. Jeżeli złącza obwodu utworzonego z dwu różnych przewodników znajdują się w różnych temperaturach, to w obwodzie powstaje siła elektromotoryczna (Th. Seebeck 1821). Zachodzi również zjawisko odwrotne: gdy w obwodzie składającym się z dwu różnych przewodników wywołamy przepływ prądu, to między złączami powstanie różnica temperatur (J. C. A. Peltier 1834).

**50** Rysując w okręgu o ustalonej średnicy  $AB$  po jednej stronie tej średnicy półokręgi o średnicach równych  $\frac{1}{n} AB, \frac{2}{n} AB, \dots, \frac{n-1}{n} AB$  styczne do danego okręgu w punkcie  $A$ , a po drugiej stronie średnicy także półokręgi styczne do danego okręgu w punkcie  $B$ , otrzymujemy podział koła na  $n$  figur o równych polach (średnica nie jest linią podziału). Na rysunku jest  $n = 5$ .



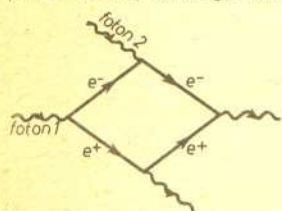
Dla  $n = 2$  uzyskujemy rysunek mający w chińskim kręgu kulturowym symboliczne znaczenie walki dobra ze złem — *in-jang*, odczytywany też jako walka aktywności z biernością lub elementów męskich i żeńskich.

**51** Termin „satelita stacjonarny” oznacza sztucznego satelitę, który obiega Ziemię w tym samym czasie, co Ziemia wykonuje obrót. Satelita taki umieszczony na orbicie kołowej w płaszczyźnie równika wisi praktycznie stale nad jednym punktem Ziemi. Z warunku równowagi przyspieszenia grawitacyjnego i odśrodkowego łatwo znaleźć, że orbita taka ma promień około 42 240 km. Natomiast „satelita synchroniczny” to taki, który wykonuje w tym samym czasie własny obrót i obieg wokół swojej macierzystej planety. W wyniku tego zwrócony jest do niej stale tą samą stroną. Najbardziej znanym przykładem jest nasz Księżyc. Wiele innych satelitów też się tak zachowuje, np. największe satelity Jowisza: *Io*, *Europa*, *Ganimedes*, i *Callisto*.

**52** Startujemy od dowolnej liczby naturalnej  $k$ . Jeśli jest ona parzysta, to zastępujemy ją przez  $k/2$ , a jeśli nieparzysta, to przez  $3k+1$ . Z wyników postępujemy tak samo. Czy kontynuując ten proces zawsze dojdziemy do liczby 1? Zadanie to jest do dziś nie rozwiązane. Wiadomo, że zaczynając od liczb mniejszych niż  $2^{40}$  zawsze dojdziemy do jedynki. Wiadomo też, iż istnieje taka stała dodatnia  $r$ , że wśród liczb mniejszych od  $n$  jest co najmniej  $n^r$  liczb, od których dojdziemy do 1 (dla dostatecznie dużych  $n$ ).



**53** Jak wiadomo, fale elektromagnetyczne interferują, tj. fala w danym punkcie jest sumą fal dochodzących do tego punktu (tzw. zasada superpozycji). W fizyku kwantowym jest to równoważne stwierdzeniu, że fotony nie oddziałują między sobą. Możliwe są jednak odstępstwa od tej zasady. Foton, z niewielkim prawdopodobieństwem, może zmienić się w parę elektron-pozyton ( $e^+ e^-$ ). Para ta musi jednak ulec anihilacji z powrotem na foton, ponieważ w reakcji foton  $\rightarrow e^+ e^-$  nie jest spełniona zasada zachowania energii (jeśli zachowany jest pęd). Czas trwania fluktuacji foton  $\rightarrow e^+ e^- \rightarrow$  foton nie może być dłuższy niż  $h/\Delta E$  ( $h$  — stała Plancka,  $\Delta E$  — różnica energii fotonu i pary  $e^+ e^-$ ). Jeśli w tym czasie inny foton zostanie pochłonięty przez elektron, będzie mógł zająć proces przedstawiony na diagramie.

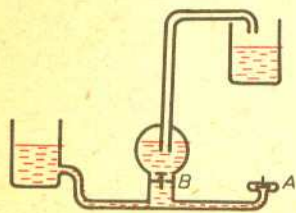


Tak więc światło może rozpraszac się na świetle, co prowadzi do złamania zasady superpozycji. Procesy takie, mimo że niesłychanie mało prawdopodobne, są obserwowane w eksperymentach.

**54** Od 1604 roku nie zaobserwowano żadnego pewnego wybuchu supernowej w naszej Galaktyce. Ostatnie tego typu zjawisko miało więc miejsce jeszcze przed zastosowaniem lunety do celów astronomicznych. Czy jednak blisko czterechsetletni rozwój techniki obserwacyjnej pomógłby dziś astronomom w badaniu tego typu zjawisk? Okazuje się, że nie bardzo. Wybuchy supernowych w naszej Galaktyce są wydarzeniami na tyle rzadkimi, że nie sposób uwzględnić ich przy projektowaniu najnowszych teleskopów. Zarówno badania fotometryczne, jak i spektroskopowe wymagałyby użycia zupełnie różnych od tradycyjnych urządzeń przystosowanych do rejestracji bardzo silnego strumienia promieniowania. Na przykład wybuch *γ Velorum* (jest ona poważną kandydatką na supernową) spowodowałby, oprócz innych efektów, wzrost jej jasności w maksimum do  $-12$  wielkości gwiazdowej. Stałaby się więc obiektem jaśniejszym niż Księżyc w pełni. Przy badaniach fotometrycznych równoległe z obserwacjami blasku danego obiektu należy rejestrować blask gwiazdy porównania. W tym wypadku oznaczałoby to konieczność porównywania gwiazd o jasnościach różniących się kilkaset tysięcy razy. W stosunkowo krótkiej fazie maksimum wybuchu supernowej można by stosować do obserwacji teleskopy słoneczne. W przypadku *γ Velorum* również ta możliwość ma znaczenie o tyle niewielkie, że na półkuli południowej (tylko stamtąd widoczny jest ten obiekt) istnieją zaledwie dwa obserwatoria słoneczne, w dodatku obydwaj w Australii, a więc nawet w maksimum wybuchu nie byłoby możliwe obserwacje 24-godzinne.

**55** Pojedyncze krople wody mają dużo większą siłę niszczącą niż ciągła struga o tej samej prędkości. Stosunek ciśnień wywieranych na przeszkodę w obu przypadkach jest równy stosunkowi prędkości dźwięku w wodzie (około 1500 m/s) do prędkości kropli. Gdyby nagle przerwać strumień wody w kranie wodociągowym, nastąpiłby gwałtowny wzrost ciśnienia statycznego, co doprowadziłoby do rozerwania rur. Dlatego w kurtkach wodnych zawory otwiera się i zamyka stopniowo za pomocą śruby. Ze względu na dużą ściśliwość gazów nie stosuje się takich zaworów w kurtkach gazowych.

Jeszcze niedawno stosowano do podnoszenia wody na wyższy poziom skonstruowany przez Montgolfiera tzw. taran hydrauliczny. Spływająca z dolnego zbiornika woda zamyka wentyl *A*. Następuje wtedy gwałtowny wzrost ciśnienia, co powoduje otwarcie wentyla *B* i przepływ wody do górnego zbiornika. Po pewnym czasie, gdy ciśnienie spadnie, otwiera się wentyl *A*, a zamyka *B* i cały proces się powtarza.



**56** Najdalszym znanym obecnie obiektem we Wszechświecie jest odkryty przez astronomów australijskich kwazar o symbolu katalogowym PKS 2000-330 leżący w gwiazdozbiornie Orła. O jego odległości świadczy przesunięcie ku czerwieni: linia  $L_{\alpha}$  o laboratoryjnej długości fali 1216 Å obserwowana jest w jego widmie jako mająca 5825 Å, skąd przesunięcie ku czerwieni  $z = \Delta\lambda/\lambda = 3,78$ . Odległość odpowiadająca takiemu  $z$  da się określić precyzyjniej dopiero po ustaleniu konkretnego modelu Wszechświata, co na razie jest niewykonalne. W każdym razie wynosi ona 10—20 miliardów lat świetlnych (3—6 Gpc).

**57** Udowodnię za chwilę, że to ja mam największego pecha. Oznaczmy przez  $X_0$  mój czas oczekiwania, związany z pewnym zdarzeniem losowym. Przypuśćmy, że temu samemu doświadczeniu poddanych jest wiele osób i oznaczmy ich czasy oczekiwania przez  $X_1, X_2, \dots$ . Chcę wiedzieć, ile średnio osób muszę zapytać, zanim znajdę taką, której czas oczekiwania jest dłuższy niż mój. Mówiąc bardziej formalnie, niech  $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (dla prostoty: ciągłym). Wprowadzamy nową zmienną losową  $N = \inf \{k: X_k > X_0\}$ . Okazuje się, że  $N$  ma nieskończoną wartość oczekiwaną! Istotnie, zdarzenie  $\{N > n-1\}$  polega na tym, że maksymalny wyraz ciągu  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  pojawi się na pierwszym miejscu. Ze względu na symetrię

prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi  $\frac{1}{n}$  (zdarzenia typu  $\{X_j = X_k\}$  mają prawdopodobieństwo równe zero). Mamy więc

$$P(N = n) = P(N > n-1) - P(N > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{Czyli } EN = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Zatem to ja mam największego pecha; inne osoby mogą rozumować podobnie, nie poprawia to jednak mojego samopoczucia.

**58** Jedynym obiektem, który wschodzi na zachodzie i zachodzi na wschodzie, jest *Phobos*, bliższy satelita Marsa. Mamy tu na myśli oczywiście wschody i zachody na Marsie. *Phobos* obiega swoją planetę w  $7^h 39^m$ , a więc szybciej niż Mars wykonuje obrót ( $24^h 37^m$ ) i stąd to osobliwe zjawisko.

**59** Ferromagnetyk poddany działaniu pola magnetycznego ulega namagnesowaniu, które nie znika po wyłączeniu pola. Całkowite rozmagnesowanie wymaga włączenia pola o przeciwnym kierunku. Zjawisko to nazywa się histerezą magnetyczną. Podobnie zachowuje się ciało sprężyste. Po ustaniu działania siły odkształcenie pozostaje różne od zera i jego likwidacja wymaga działania siły skierowanej przeciwnie. Istnienie histerezy sprężystej związane jest z występowaniem sił tarcia wewnętrznego. Powodują one utratę części pracy mechanicznej na ciepło. Tarcie wewnętrzne powoduje również występowanie tzw. zapóźnienia sprężystego: większa część odkształcenia następuje niemal natychmiast po przyłożeniu siły, a niewielka jego część narasta później wykładniczo w czasie charakterystycznym dla materiału sprężystego (czas relaksacji), wynoszącym około minuty dla kauczuku i będącym rzędu sekundy dla metali.

**60** Punktem trójkąta  $ABC$ , dla którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza, jest taki punkt  $P$ , zwany punktem Torricellego, że każdy z kątów  $\sphericalangle APB$ ,  $\sphericalangle BPC$ ,  $\sphericalangle CPA$  jest równy  $120^\circ$ . Punktem czworokąta  $ABCD$ , dla którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza, jest punkt przecięcia przekątnych. Jeśli wierzchołek  $D$  będzie zbliżał się do wierzchołka  $C$ , to czworokąt  $ABCD$  będzie przybliżał trójkąt  $ABC$ , ale punkt przecięcia przekątnych będzie zbiegał nie do punktu Torricellego trójkąta  $ABC$ , lecz do wierzchołka  $C$ . Czyżby znów jakaś nieciągłość w matematyce? Nie, po prostu w trójkącie  $ABC$  punkt  $C$  jest tym, dla którego najmniejsza jest suma odległości od wierzchołków  $A$  i  $B$  plus podwojona odległość od wierzchołka  $C$ .

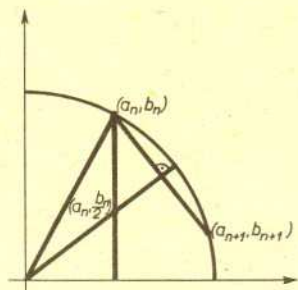


**61** Posiadacze kalkulatorów bez funkcji „pierwiastek kwadratowy” mogą obliczyć  $\sqrt{a^2+b^2}$ . Wystarczy znaleźć jeden z pierwszych wyrazów ciągu  $(a_n)$ , gdzie:

$$a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = a_n \cdot \frac{3c_n+4}{c_n+4}, b_{n+1} = b_n \cdot \frac{c_n}{c_n+4},$$

a przez  $c_n$  oznaczamy  $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2$ . Jeśli założymy, że  $a \geq b \geq 0$ ,

$a \neq 0$  i oznaczmy  $p = \sqrt{a^2+b^2}$ , to  $|a_1-p| < 0,011 \cdot p$ ,  $|a_2-p| < 3 \cdot 10^{-7} \cdot p$ ,  $|a_3-p| < 10^{-20} \cdot p$ ,  $|a_4-p| < 10^{-60} \cdot p$ . Algorytm powyższy można wyprowadzić korzystając z rysunku. Co ciekawe, powyższy sposób obliczania długości wektora  $(a, b)$  zastosowany w komputerach jest na ogół znacznie szybszy niż mnożenie  $a$  przez  $a$  i  $b$  przez  $b$ , dodawanie i następnie obliczanie pierwiastka kwadratowego.



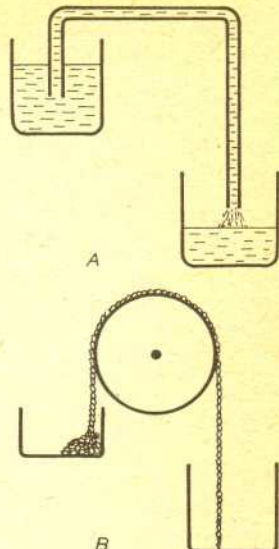
**62** Podwodne trzęsienie ziemi lub wybuch wulkanu prowadzą do powstawania fal (fale tsunami) w oceanie o okresie drgań rzędu kilkudziesięciu minut, długości 100–300 km i prędkości rozchodzenia się 400–800 km/godz. Niewielka wysokość fali tsunami na otwartym oceanie (~ 1 m) gwałtownie rośnie przy zbliżaniu się do płytkiego brzegu i szczególnie w wąskich zatokach dochodzić może do kilkudziesięciu metrów. W 1868 roku w rejonie Arica (Chile) fala o wysokości około 14 m przeniosła amerykańską kanonierkę zakotwiczoną 4,5 km od brzegu na 3 km w głąb łądu.

**63** Gdyby większość masy Galaktyki była skupiona w jej centrum, to w okolicy Słońca gwiazdy dalsze od centrum poruszałyby się wolniej niż bliższe. Tymczasem kilka lat temu wykonane zostały obserwacje, które wydają się podważać ten pogląd. Przypuszcza się, że poza wokółgalaktyczną orbitą Słońca znajduje się znaczna ilość niewidocznej (nie świecącej) materii o nie znanej obecnie naturze. Jeżeli się to potwierdzi, to trzeba będzie uznać, że nasza Galaktyka w granicach 60 kpc zawiera masę  $6 \cdot 10^{11}$  mas Słońca, czyli jest co najmniej trzy razy większa i masywniejsza, niż nam się dotychczas zdawało.

**64** Lód występuje w siedmiu różnych odmianach krystalicznych. Wszystkie rodzaje lodu można otrzymać w laboratoriach stosując odpowiednie ciśnienia i temperatury. Na przykład VII lód (tzw. lód gorący) powstaje przy ciśnieniu około 40 000 atmosfer. Ma on cząsteczki znacznie gęściej upakowane niż lód występujący w przyrodzie (jego gęstość wynosi 1,5 g/cm<sup>3</sup>) i topi się w temperaturze 192°C.

**65** Lewar hydrauliczny (rysunek A) służy do przelewania cieczy. Przepływ zaczyna się, gdy podciągamy ciecz z wyższego naczynia do zagięcia rurki.

Działanie lewara wyjaśnia rysunek B. Końce przerzuconego przez blok łańcucha znajdują się w dwu naczyniach. Jeśli podniesiemy na przykład lewe naczynie, większy ciężar łańcucha wiszącego z prawej strony znacznie przeciagając łańcuch na tę stronę. Poprawność takiej analogii wynika stąd, że dzięki siłom spójności wolna od powietrza ciecz ma dużą wytrzymałość na zerwanie. Na przykład wytrzymałość wody wynosi  $3,2 \cdot 10^6$  N/m<sup>2</sup>.



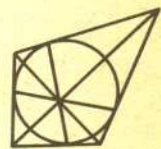
**66** Pierwsza zasada kosmologiczna stwierdzająca, że nasze obserwacje są typowe, ponieważ nasza pozycja we Wszechświecie nie jest wyróżniona, pozwala sądzić, że cały Wszechświat jest jednorodny i izotropowy w dużej skali. Wyobrażenie, jak duża musi być ta skala, daje fakt, że dotychczas największą znaną strukturą we Wszechświecie jest włóknista supergromada galaktyk, której długość jest równa 700 mln lat świetlnych. Struktura ta oddalona jest od nas o 200 mln lat świetlnych. Supergromady włókniste, tj. ogromne, wydłużone skupiska galaktyk są obiektami bardzo typowymi. 90% wszystkich galaktyk grupuje się w takie „spaghetti” (niektórzy astronomowie tak właśnie nazywają modele Wszechświata z włóknistymi supergromadami) zajmując zaledwie 0,1 całej przestrzeni. Większość przestrzeni we Wszechświecie jest więc praktycznie pusta.

**67** Metale są bardzo dobrymi przewodnikami prądu i ciepła. W temperaturach przewyższających 200 K stosunek przewodności cieplnej ( $\lambda$ ) do przewodności elektrycznej ( $\sigma$ ) metali jest proporcjonalny do temperatury (prawo Wiedemanna-Franza)

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \alpha T.$$

Wartość  $\alpha$  wynosi około  $2,5 \cdot 10^8$  V<sup>2</sup>/K<sup>2</sup> i nie zależy od rodzaju metalu.

**68** W dowolnym czworokącie opisanym na kole przekątne i proste łączące punkty styczności przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie.



**69** Dość niezwykłym przyrządem do pomiaru małych kątów stosowanym w XIX w. był tzw. heliometr — luneta z rozciętym na połowy obiektywem! Połówki jego były przesuwane wzdłuż rozcięcia za pomocą śruby mikrometrycznej. Aby zmierzyć odległość kątową dwóch gwiazd, obracało się obiektyw tak, by rozcięcie było równoległe do linii łączącej gwiazdy, po czym przesuwano się połówki obiektywu tak, aby obraz jednej gwiazdy w okularze dawany przez jedną z połówek pokrył się z obrazem drugiej gwiazdy dawanym przez drugą połówkę. Na podstawie odczytu śruby mikrometrycznej i znanej ogniskowej obiektywu łatwo już znaleźć odległość kątową gwiazd. Metoda ta, dziś już nie stosowana, musiała widocznie być niezła, skoro F. W. Bessel za jej pomocą wyznaczył pierwszą paralaksę gwiazdy (61 Cygni) — a kąt ten jest przecież mniejszy od 1”.

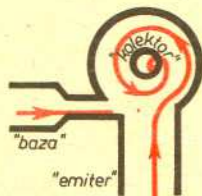


**70** Najważniejszym pierwiastkiem w archeologii jest węgiel, którego radioaktywny izotop ( $C^{14}$ ) jest wykorzystywany w datowaniu znalezisk. Warto wiedzieć, że obfitość tego izotopu w atmosferze Ziemi zależy od stopnia aktywności Słońca.  $C^{14}$  powstaje bowiem w górnych warstwach atmosfery w wyniku oddziaływania promieniowania kosmicznego z głównym składnikiem powietrza, jakim jest azot ( $N^{14}$ ). W okresie silnej aktywności Słońca jego pole magnetyczne osłania Ziemię przed promieniowaniem kosmicznym. Strumień promieniowania jest wtedy zredukowany, a co za tym idzie, ilość powstającego  $C^{14}$  jest stosunkowo mała. Odwrotnie jest podczas minimum aktywności. Słońce „zdejmuje” z Ziemi ochronny płaszcz swojego pola magnetycznego, strumień promieniowania kosmicznego rośnie i liczba atomów radioaktywnego węgla wzrasta. Znajomość tego faktu pozwala badać stan aktywności naszej gwiazdy przed wieloma stuleciami. Mierząc obfitość  $C^{14}$  w rocznych przyrostach pni bardzo starych drzew można określić stopień aktywności Słońca odpowiadający okresowi, w którym badane słoje drzewa powstawały. W ten sposób udało się określić trwające po kilkadziesiąt lat epoki zaniku i wzmożonej aktywności Słońca. I tak, cofając się w przeszłość mamy: Minimum Maundera (w XVII wieku), Spörerera (na przełomie XV i XVI wieku), Średniowieczne Maksimum i Minimum, Rzymskie Maksimum (na przełomie er), a następnie trzy kolejne minima: Greckie, Homera i Egipskie. Około 2000 lat p.n.e. pojawiają się maksima: Stonehenge, Piramid i Sumeryjskie. Od bez mała trzystu lat Słońce znajduje się w stanie wzmożonej aktywności.

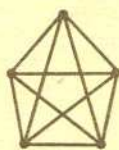
**71** Zaćmienie Słońca trwa tym dłużej, im większy rozmiar ma przekrój cienia Księżyca powierzchnią Ziemi i im wolniej względem obserwatora ten cień się porusza. Najbardziej sprzyjające warunki to: Księżyc najbliżej Ziemi, Ziemia najdalej od Słońca (zapewniają one maksymalny rozmiar cienia), obserwator na równiku, Księżyc ze Słońcem w zenicie (te warunki z kolei zapewniają najwolniejszy ruch cienia). W przypadku ich spełnienia faza całkowitości zaćmienia może trwać  $7^m40^s$ . Dłuższy okres można osiągnąć już tylko „goniąc” cień Księżyca w naddźwiękowym samolocie — i niektórzy tak robią.

**72** Gwałtowna zmiana ciśnienia atmosferycznego, uderzenie wiatru itp. mogą powodować powstanie fal stojących (sejsz) w jeziorach. Fale takie mają długość porównywalną z rozmiarami zbiornika, w którym zostały wzbudzone, a więc często długość rzędu wielu kilometrów i długi okres drgań — np. sejsze obserwowane na powierzchni Jeziora Genewskiego mają okres około 1 godziny. W 1954 roku sejsze o amplitudzie około 1,5 metra zmyły wielu wędkarzy z wysepek na jeziorze Michigan.

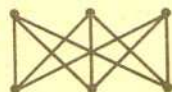
**73** Układy elektroniczne są bardzo wrażliwe na promieniowanie jonizujące i zmiany temperatury. Z tego powodu sputnikami czy wyrzutniami rakiet steruje się za pomocą układów, w których przepływ prądu zastąpiono przepływem cieczy. Na rysunku przedstawiony jest hydrodynamiczny „ tranzystor”, tzw. wzmacniacz typu Vortex. Główny prąd cieczy wpływa do komory w kształcie walca przez otwór w ścianie bocznej, a wypływa przez otwór w dnie. Ciecz w komorze tworzy wir podobnie jak woda wypływająca z wanny. Strumień regulujący wprowadzany jest stycznie do powierzchni walca. Powoduje on zmniejszenie ciśnienia przy powierzchni (prawo Bernoulliego), a więc przesunięcie głównego prądu ku ściankom i zmniejszenie odpływu cieczy. Charakterystyka takiego wzmacniacza ma przebieg zbliżony do charakterystyki zwykłego tranzystora, przy czym strumień odpowiada natężeniu prądu, a ciśnienie — potencjałowi.



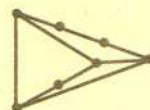
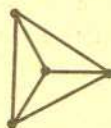
**74** Przez graf rozumiemy zbiór wierzchołków, w którym pewne pary połączono krawędziami. Graf jest planarny, jeśli można go narysować na płaszczyźnie tak, by wierzchołki były punktami, a krawędzie krzywymi i żaden punkt wewnętrzny krawędzi nie należał do innej krawędzi. Od bardzo dawna ludzie interesowali się problemem: które grafy są planarne, a które nie? Ciekawą i chyba zaskakującą charakterystykę daje twierdzenie Kuratowskiego, pozwalające badać powyższy problem lokalnie. Twierdzenie: Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z



ani z



Dwa grafy uważamy za homeomorficzne, jeżeli możemy je otrzymać z tego samego grafu przez podział krawędzi, np.



są homeomorficzne.

**75** Zjawisko dwójłomności związane jest z anizotropią własności optycznych ośrodka. Taka anizotropia może być wywołana działaniem czynników zewnętrznych (dwójłomność wymuszona). W 1813 roku Thomas Seebeck odkrył występowanie dwójłomności w szkle pod wpływem ściskania. Wiele cieczy umieszczonych w polu elektrycznym lub magnetycznym zachowuje się jak kryształ jednoosiowy, o osi optycznej równoległej do kierunku pola. Dwójłomność wymuszona polem elektrycznym została odkryta przez Johna Kerra w 1875 r. i następnie zaobserwowana również w ciałach stałych i gazach, natomiast odkrytą przez Aimé Cottona i H. Moutona (1907) dwójłomność pod wpływem pola magnetycznego obserwowano głównie w cieczach.

**76** Oto analityczny dowód twierdzenia Euklidesa: Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. Każda liczba naturalna da się jednoznacznie przedstawić jako iloczyn potęg różnych liczb pierwszych o wykładnikach nieujemnych. Załóżmy, że liczb pierwszych jest  $k$  i  $p_1, \dots, p_k$  to wszystkie te liczby. Tak więc zbiór liczb naturalnych to zbiór  $\{p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} : n_1 \in N \cup \{0\}, \dots, n_k \in N \cup \{0\}\}$ . Pomnożmy

zbieżne szeregi geometryczne  $\sum_{n=0}^{\infty} p_1^{-n}, \sum_{n=0}^{\infty} p_2^{-n}, \dots, \sum_{n=0}^{\infty} p_k^{-n}$ ,

tzn. utwórzmy szereg, którego wyrazami będą wszystkie możliwe iloczyny  $p_1^{-n_1} \cdot p_2^{-n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{-n_k}$ . Wszystkie wyrazy szeregów są dodatnie, a więc niezależnie od kolejności sumowania iloczynów szereg z nich utworzony jest zbieżny. Ale w tym szeregu wystąpią odwrotności wszystkich liczb naturalnych, każda dokładnie raz,

czyli będzie on równy  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ . Otrzymujemy sprzeczność,

gdyż ten ostatni szereg nie jest zbieżny, bowiem dla każdego

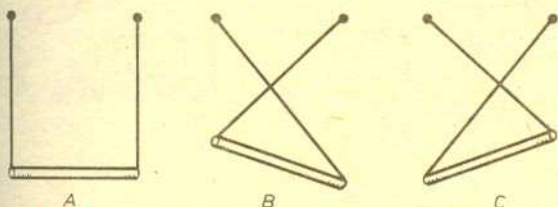
$$\text{naturalnego } l \text{ mamy } \sum_{m=1}^{2^l} \frac{1}{m} \geq \sum_{i=1}^l \sum_{m=2^{i-1}+1}^{2^i} \frac{1}{m} \geq \sum_{i=1}^l 2^{i-1} \cdot \frac{1}{2^i} = \frac{l}{2}.$$

**77** W czasie silnej burzy w roku 1658 Newton (miał wówczas piętnaście lat) mierzył siłę wiatru na podstawie różnicy długości skoku z wiatrem i pod wiatr.



**78** Zaćmienie czy to Słońca, czy Księżyca bywa zawsze kilka w roku. Każde zaćmienie Księżyca jest oczywiście widoczne z całej półkuli Ziemi, z której akurat widać Księżyc. Żeby jednak zobaczyć zaćmienie Słońca, trzeba znaleźć się w samym stożku cienia Księżyca. Dlatego w danym miejscu Ziemi zaćmienia te zdarzają się bardzo rzadko. I tak ostatnie całkowite zaćmienie Słońca widoczne w Polsce było 30 VI 1954, najbliższe zaś nastąpi dopiero 14 VI 2200.

**79** Ciężki pręt zawieśmy na dwóch niciach. Końce nici przymocujemy do pionowej płaszczyzny, jak to przedstawia rysunek A. Ważne jest, żeby punkty zaczepienia znajdowały się na tym samym poziomie. Skrzyżujemy teraz nici obracając pręt o  $180^\circ$ . Czy pręt będzie nadal wisiał poziomo? Okazuje się, że odpowiedź zależy od długości nitek. Jeśli długość nitek jest mniejsza niż  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (długość pręta), położenie poziome nie jest stabilne. Pręt przyjmie jedno z położen przedstawionych na rysunku B i C.



**80** Pewnego razu w Stanach Zjednoczonych przeprowadzono wśród kobiet ankietę, której celem było oszacowanie liczby przypadków przerywania ciąży. Ankieterzy spodziewali się, że trudno będzie uzyskać wiarygodne dane, ponieważ nie wszystkie kobiety, które przerywały ciążę, zechcą odpowiedzieć twierdząco na postawione pytanie. Poradzili sobie w następujący sposób. Kobiety, które nie przerywały ciąży, miały wpisać odpowiedź „nie”. Pozostałe miały rzucić kostkę. Te, które wyrzuciły szóstkę, miały wpisać odpowiedź „tak”. Te, które uzyskały mniej oczek, miały rzucić jeszcze raz kostkę i wpisać odpowiedź na pytanie: „czy wypadła parzysta liczba oczek?”. W ten sposób nie można było stwierdzić, na które pytanie odpowiadała ankietowana. Natomiast, korzystając z prostych rozważań probabilistycznych można było wyliczyć procent przypadków przerywania ciąży. Przypuśćmy, że ankietą obejmowała  $m$  kobiet, z których  $k$  przerywało ciążę. Prawdopodobieństwo uzyskania odpowiedzi twierdzącej wyniesie  $\frac{5}{6} \frac{k}{m} + \frac{1}{12} \frac{k}{m} = \frac{11}{12} \frac{k}{m}$ . Jeśli więc procent odpowiedzi twierdzących wynosi  $t$ , to procent przypadków przerywania ciąży jest równy około  $\frac{12}{11} t$ .

**81** Robert Hooke (1635—1703) prowadził nieustanne spory z innymi uczonymi. Z Newtonem spierał się o pierwszeństwo odkrycia prawa ciężenia, z Huygensem o wynalazek zegara wahadłowego. Po przedstawieniu przez Newtona korpuskularnej teorii światła scysja z Hookeiem — zwolennikiem teorii falowej — była tak ostra, że Newton postanowił powstrzymać się z ogłaszaniem swoich wyników aż do śmierci Hooke'a. Postanowienia tego dotrzymał.

**82** Jeszcze nie tak dawno pulsar w mgławicy Krab był najszybciej wirującą znaną gwiazdą neutronową — 30 obrotów na sekundę. Pod koniec 1982 r. grupa amerykańskich radioastronomów odkryła pulsar — oznaczony symbolem PSR 1937+215 — o okresie 1,5578...  $\mu s$ , czyli wykonujący 642 obr./s. Pulsar leży w gwiazdozbiornie Lisa w odległości około 3 kpc i prawdopodobnie jest nim pewien czerwony obiekt 22 wielkości gwiazdowej. Jeżeli ta identyfikacja pulsara jest poprawna, byłby to trzeci pulsar widoczny w zakresie optycznym. Prędkość kątowna tego pulsara stanowi około 90% prędkości maksymalnej dopuszczalnej przez warunek równowagi mechanicznej.

**83** Pytanie zadane grupie studentów: „Proszę podać przykład liczby rzeczywistej”. Cisza. Po kilkakrotnym powtórzeniu pytania niepewna odpowiedź z końca sali: „x?”.

**84** Jedynymi funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej spełniającymi dla wszystkich  $x$  i  $y$  równania: (1)  $f(x+y) = f(x)+f(y)$  oraz (2)  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$  są: funkcja stała równa zeru oraz funkcja  $f(x) = x$ . Natomiast wśród funkcji zespolonych zmiennej zespolonej, oprócz dwóch wyżej wspomnianych funkcji i funkcji  $f(z) = \bar{z}$ , istnieją jeszcze inne funkcje spełniające te równania, i to funkcje wzajemnie jednoznaczne (Lebesgue, 1905). Oczywiście, jeśli funkcja  $f$  spełnia (1), to funkcja  $g$ , określona wzorem  $g(x) = e^{f(\log|x|)}$  dla  $x \neq 0$  oraz  $g(0) = 0$ , spełnia (2). Każda ciągła funkcja  $f: R \rightarrow R$  spełniająca (1) jest postaci  $f(x) = ax$ , gdzie  $a$  jest dowolną liczbą rzeczywistą. Istnienie nieciągłych funkcji spełniających (1) wynika z aksjomatu wyboru.

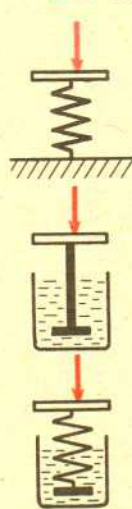
**85** Ziemia jest kulista, o czym najłatwiej przekonać się spojrzawszy na globus.

**86** Spróbujmy ustawić 36 wojskowych (po 6 z sześciu jednostek i po sześciu w tym samym stopniu, przy czym reprezentację jednostki stanowią wojskowi różnych stopni) na polach szachownicy  $6 \times 6$  tak, by wszyscy stojący w szeregu czy w kolumnie byli różnych stopni i z różnych jednostek. Albo lepiej nie próbujmy — to na pewno się nie uda. Nie uda się to także dla 14-osobowych reprezentacji 14 jednostek ani dla 21-osobowych reprezentacji 21 jednostek. Dla wielu innych liczb (np. 2, 3, 9) jest to wykonalne. Do tej pory jednak nie wiadomo, czy może się to udać dla 10-osobowych reprezentacji 10 jednostek.

**87** Wkroplone do wody stopione szkło krzepnie w postaci wydłużonych kropli zakończonych cienką nitką (tzw. szklane łyzy). Dzięki dużym naprężeniom krople nie kruszą się nawet przy uderzeniu młotkiem. Natomiast niewielkie uszkodzenie, np. odłamanie szklanej nitki, szybko rozprzestrzenia się w głąb kropli powodując jej wybuchowe rozpadnięcie się na kawałki. Jeśli kroplę umieścimy w szklance wody, wybuchowi towarzyszy powstanie lokalnych bardzo wysokich ciśnień i rozerwanie szklanki.

**88** Kwadrat można rozciąć na 8 trójkątów ostrokątnych, a nie można go rozciąć na mniejszą liczbę takich trójkątów.

**89** Do opisu własności mechanicznych ciał stałych i cieczy Maxwell używał modeli.



Sprężyna to model ciała stałego. Przyłożenie siły powoduje odkształcenie, które znika po jej usunięciu.

Tłok w naczyniu z lepką cieczą modeluje własności mechaniczne cieczy. Dowolnie mała siła powoduje trwałe przesunięcie tłoka.

Tłok na sprężynie to model tzw. cieczy przechłodzonej. Po przyłożeniu siły sprężyna ulega skróceniu i zaczyna przesuwać tłok.

(Czas, po którym powróci ona do położenia równowagi (tzw. czas relaksacji), jest określony przez lepkość cieczy i współczynnik sprężystości. Reakcja układu na zewnętrzną siłę zależy teraz od szybkości jej zmian. Jeśli czas zmian jest dużo dłuższy od czasu relaksacji, układ będzie się zachowywał tak, jakby nie było sprężyny, czyli jak ciecz. Jeśli czas działania siły będzie dużo krótszy od czasu relaksacji, tłok nie zdąży się przesuwać i odpowiedź będzie taka jak dla ciała sprężystego. Czas relaksacji smoły jest rzędu kilku miesięcy, a czas relaksacji skał w płaszczu Ziemi rzędu setek tysięcy lat.)



**90** Oto proste zagadnienie przyrodnicze, w którym pojawia się algebraiczne równanie piątego stopnia. W jakiej odległości  $x$  od Ziemi i na linii łączącej ją z Księżycem znajduje się punkt, w którym panuje nieważkość (będzie to tzw. punkt libracji)? Przyspieszeń do rozważenia jest trzy: grawitacyjne ze strony Ziemi i Księżyca oraz odśrodkowe. Jeżeli odległość Księżyca oznaczyć przez  $a$ , zaś jego prędkość kątową przez  $\omega$ , to z warunku równowagi mamy

$$\frac{GM}{x^2} = \frac{Gm}{(a-x)^2} + \omega^2(a-x)$$

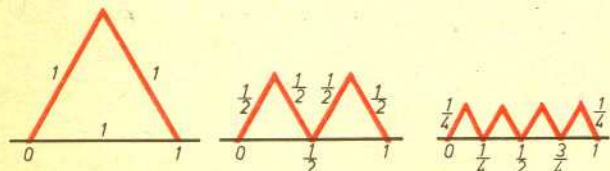
(gdzie  $M$  i  $m$  to masy Ziemi i Księżyca,  $G$  — stała grawitacji). Po uporządkowaniu dostajemy równanie piątego stopnia.

**91** Mamy w Układzie Słonecznym co najmniej 3 planety z pierścieniami. Pierścienie Saturna dostrzegł jako pierwszy Galileusz w 1610 roku już przy swoich pierwszych obserwacjach teleskopowych, atczkolwiek wskutek zbyt skromnych możliwości przyrządów nie rozpoznał ich jako pierścienie. Dokonał tego dopiero w 1655 r. Huygens. Pierścienie Urana zostały odkryte w 1977 r. dzięki temu, że pewna gwiazda zakryta wówczas przez tę planetę wykazywała zmiany jasności przed zakryciami i — symetrycznie — po zakryciu. Te zmiany jasności zinterpretowano jako przesłanianie gwiazdy przez pierścienie. Wreszcie w 1979 r. Voyagery przekazały na Ziemi telewizyjne obrazy bardzo słabego pierścienia Jowisza. W 1986 r. Voyager 2 przekazał obrazy pierścieni Urana, a w 1989 — kto wie? — może przekazać i Neptuna.

**92** Dość popularny jest rysunkowy „dowód” równości  $2 = 1$ .

Lamane zbiegają jednostajnie do odcinka  $\langle 0,1 \rangle$ , więc ich długości „muszą” zbiegać do długości odcinka. A że długości lamanych są równe 2, a odcinka 1, mamy żadaną równość. Fałszywość wyniku pokazuje, że nie „muszą” ... Zobaczymy, co z tego wynika.

Oznaczmy przez  $X$  przestrzeń funkcji ciągłych i kawałkami liniowych, określonych na odcinku  $\langle 0,1 \rangle$  (tzn. funkcji, których wykresami są lamane). Odległość dwóch takich funkcji określamy wzorem  $\rho(f, g) = \sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f(x) - g(x)|$ . Otrzymujemy w ten sposób przestrzeń metryczną. Powyższy „dowód” pokazuje, że funkcja  $d: X \rightarrow R$  określona wzorem  $d(f) = (\text{długość wykresu } f)$  nie jest ciągła na  $X$ .



**93** Ponad połowa wszystkich gwiazd (przynajmniej w okolicach Słońca) stanowi układy podwójne lub wielokrotne. Nie jest wykluczone, że również nasze Słońce, choć powszechnie uznawane za gwiazdę pojedynczą, ma towarzyszkę, zwaną *Nemezis*. Może to być bardzo słaby obiekt w postaci czerwonego karła, znajdujący się w odległości kilku lat świetlnych od Słońca. Trudności związane z odkryciem *Nemezis* mogą wynikać stąd, że znajduje się ona na tle gęsto zaludnionego przez gwiazdy pasa Drogi Mlecznej. Okres obiegu hipotetycznej towarzyszkii Słońca szacuje się na 26 000 000 lat, a jej apeliem powinno wypadać w odległości 170 000 jednostek astronomicznych od naszej gwiazdy dziennej, co z grubsza odpowiada połowie średniej odległości między gwiazdami w naszej części Galaktyki. Istnieją teorie, zgodnie z którymi przejścia *Nemezis* przez perihelium zaburzają strukturę układu planetarnego, czego wynikiem mogą być na przykład istotne zmiany ziemskiego klimatu. Stąd pochodzi nazwa *Nemezis* — bogini gniewu — przynoszącej naszej planecie klęski i zniszczenia.

**94** „Cukier należy do węglowodanów i skręca płaszczyznę polaryzacji. Kto by się temu opierał, podlega karze bezwzględnego aresztu bez zamiany na grzywnę”. (Julian Tuwim)

**95** Kiedy półtora wieku temu astronomowie zaczęli odkrywać planetoidy, nadawali im najpierw nazwy czerpane z mitologii, a gdy ich zabrakło, sięgnięto do nazw miejscowości znanych w Starożytności. Z czasem jednak konwencja ta została przełamana. Odkrywcy zaczęli nadawać nazwy według własnych upodobań, czcząc w ten sposób wielkich ludzi (1462 Zamenhof), wyrażając swe uczucia do przyjaciółek (607 Jenny, 616 Elly), czy żon (1127 Mimi), czy wreszcie wyrażając miłość do roślin (1056 Azalea), ptaków (714 Ulula), krajów (1554 Yugoslavia) i miast (397 Vienna). Ciekawa jest historia nazwy jednej z planetoid ubiegłego stulecia. Wiedeński astronom Palisa, po odkryciu planetoidy 250, ogłosił, że „sprzeda prawo do nadania jej nazwy w zamian za potrzebne mu do ekspedycji naukowej fundusze”. Znalazł się chętny, baron Albert Rothschild, który nazwał planetoidę Bettina na cześć swojej małżonki.

**96** Jeżeli na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego narysować półkola na zewnątrz trójkąta, to suma pól tych ich części, które nie mieszczą się w półkolu opartym na przeciwprostokątnej i zawierającym ten trójkąt, jest równa polu trójkąta.



**97** Tylko układ potrójny z konstelacji Centaura znajduje się bliżej Słońca, niż gwiazda Barnarda, odległa od nas o 5,9 lat świetlnych. Ma ona największy ruch własny spośród wszystkich znanych nam gwiazd i dlatego często zwana jest również Strzałą Barnarda. Ruch własny tej gwiazdy, czyli rzut jej prędkości przestrzennej na płaszczyznę styczną do sfery niebieskiej, wynosi  $10''$ ,6 na rok (odległość równą średnicy tarczy Księżyca przebywa w ciągu 180 lat). Na tak dużą wartość ruchu własnego składają się zarówno duża wartość rzeczywistej prędkości przestrzennej Strzały Barnarda, jak i jej stosunkowo niewielkie oddalenie od Słońca. Tak szybkie przemieszczanie się gwiazdy Barnarda po sferze niebieskiej było przyczyną tego, że pierwotnie odkryto ją jako gwiazdę nową. Gwiazda Barnarda leży w konstelacji Wężownika, widoczna jest więc na północnej półkuli nieba. Jednak z powodu bardzo małej jasności (9,54 mag) nie jest dostępna obserwacjom gołym okiem. Rzeczywisty blask tego czerwonego karła stanowi zaledwie 0,000 45 blasku Słońca i jest ponad 100 mln razy słabszy od blasku nadolbrzyna Deneba. Gdyby Deneb był tak blisko nas jak gwiazda Barnarda, świeciłby na nocnym niebie tak jasno jak Księżyc w pełni.

**98** Georg Placzek w swych badaniach absorpcji neutronów w złocie używał medalu Nagrody Nobla otrzymanego przez Nielsa Bohra.

**99** Często proste obliczenia wykonuje się za pomocą komputera w sposób dość skomplikowany. Dla obliczenia sumy liczb  $a_1, \dots, a_n$  najprostszy algorytm jest oczywiście taki:

suma : = 0  
dopóki  $i \leq n$  powtarzaj  
    suma : = suma +  $a_i$

Jednak komputer nie dodaje dokładnie i wynik jest zaokrąglany. Dlatego stosuje się przy dodawaniu algorytm Gilla-Möllera:

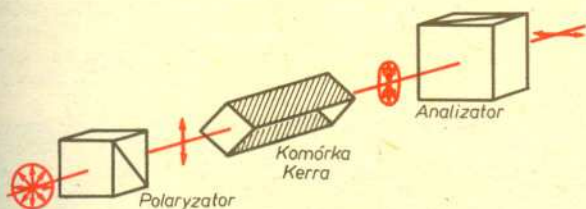
suma : = 0  
poprawka : = 0  
dopóki  $i \leq n$  powtarzaj  
    nowa suma : = suma +  $a_i$   
    poprawka : = suma — nowa suma +  $a_i$  + poprawka  
    suma : = nowa suma

suma : = suma + poprawka  
Wypróbuj, Czytelniku, oba algorytmy dodając dużo razy liczbę 9,09 zaokrąglając każde dodawanie do trzech cyfr znaczących. Dodawanie algorytmem Gilla-Möllera na komputerze Mera 400 tysiąca losowo wybranych liczb z przedziału  $\langle 0,1 \rangle$  dało błąd 30 razy mniejszy niż pierwszym algorytmem, a przy dodawaniu 10 000 liczb błąd był 180 razy mniejszy.



**100** W kronikach ludzkości zostało zapisanych pięć wybuchów supernowych w naszej Galaktyce. Supernowe te rozbiły się w latach: 1006, 1054 (pozostałością po niej jest mgławica Krab), 1572 (tzw. supernowa Tychoona Brahego), 1604 (supernowa Keplera) i 1843 (bardzo osobliwa gwiazda  $\eta$  Carinae, której natura jest właściwie do dziś nie do końca znana). Na całym niebie, tzn. w innych galaktykach, rejestruje się w sumie kilkanaście supernowych rocznie.

**101** Do fotografowania bardzo szybkich procesów konieczna jest odpowiednio szybka migawka. Działanie najszybszych migawek opiera się na tzw. efekcie Kerra: niektóre izotropowe ciecz stają się pod wpływem pola elektrycznego dwójmienne. Migawka składa się z dwóch skrzyżowanych polaryzatorów i kondensatora (rysunek) wypełnionego np. nitrobenzenem. Za pierwszym polaryzatorem światło jest spolaryzowane liniowo i nie przepuszcza go drugi polaryzator — migawka jest zamknięta. Po przyłożeniu napięcia do płytek kondensatora nitrobenzen staje się dwójmenny i zmienia polaryzację światła z liniowej na eliptyczną. Dzięki temu część światła może przejść przez drugi polaryzator. Krótki impuls elektryczny otwiera taką migawkę na około 10 ns. Dwójmówność nitrobenzenu można wywołać także polem elektrycznym fali świetlnej. Czas otwarcia migawki „uruchamianej” silnym impulsem laserowym nie przekracza kilku pikosekund



**102** W roku 1936 Stanisław Mazur udowodnił następujące twierdzenie: Istnieje najmniejszy worek, w którym mieści się każde 100 kilo kartofli.

Takie sformułowanie twierdzenia wymaga paru słów wyjaśnienia, a dokładniej zredagowania słowniczka:

„kartofel” = zbiór wypukły domknięty w  $E^3$  o niepustym wnętrzu i średnicy nie przekraczającej 1,

„worek” — sześcian o boku  $a$ , tzn.

$S_n = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3; 0 \leq x_i \leq a, i = 1, 2, 3\}$ ,

„mieści się każde 100 kilo” = jeśli suma objętości układu

$Q_1, \dots, Q_n$  „kartofli” jest równa 100, to można znaleźć takie

zbiory  $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_n$ , zawarte w  $S_n$  o rozłącznych wnętrzach, że

$\bar{Q}_i$  jest izometryczne z  $Q_i$ .

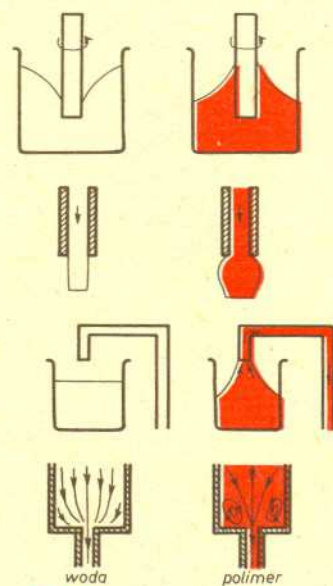
**103** Mówi się potocznie, że Księżyc przyciąga wodę ziemskich oceanów i dlatego gdy znajdzie się w danym miejscu wysoko nad horyzontem, to mamy tam przyływ. Ale w tym samym czasie jest przyływ także po przeciwnej stronie Ziemi — a więc dlaczego? Przyczyną jest fakt, że, ściślej mówiąc, przyływy powoduje różnica oddziaływań. Mianowicie po swojej stronie naszego globu Księżyc przyciąga wodę silniej niż resztę Ziemi (bo woda jest tu bliżej niego), a po przeciwnej słabiej. W rezultacie oceany ulegają wybrzuszeniu w dwóch rejonach położonych w przybliżeniu na jednej linii wraz z Księżycem.

**104** Jak skonstruować obiektyw, który skupiałby promieniowanie rentgenowskie, skoro na ogół przechodzi ono na wskroś przez większość substancji? Okazuje się, że jednak można. Otóż promieniowanie to odbija się od różnych powierzchni metalicznych, jeżeli kąt padania jest bliski  $90^\circ$ . Rentgenowski obiektyw składa się więc z wielu współosiowych pierścieni, z których każdy jest „plasterkiem” jakiegoś paraboloidy, przy czym odbicie na nim zachodzi właśnie pod dużym kątem. Kształty paraboloid są tak dobrane, by miały wspólne ognisko. W rezultacie obiektyw taki, wzbogacony filtrami przepuszczającymi tylko zakres rentgenowski, formuje w ognisku obraz na zwykłych zasadach optyki. Ostatnio w USA pracuje się nad lustrem, które odbijałoby promieniowanie rentgenowskie również pod małymi kątami. Są to badania w pewnym stopniu tajne, wiadomo tylko, że lustro takie działałoby na zasadzie warstw odbłaskowych stosowanych w optyce klasycznej.

**105** Stała dielektryczna wody jest równa 80. Oznacza to, że siła, z jaką działają na siebie dwa ładunki, jest w wodzie 80 razy mniejsza niż w powietrzu. Wniknięcie cząsteczek wody między cząsteczki ciała stałego może wielokrotnie zmniejszyć siły przyciągania, a więc i energię konieczną do rozerwania wiązań międzycząsteczkowych. Dlatego rozprzestrzenianie się defektów prowadzące do pęknięcia ciał stałych jest najczęściej dużo łatwiejsze, jeśli ciało jest zanurzone w wodzie. Niektórzy twierdzą nawet, że szkło można w wodzie ciąć nożycami. Bezpieczniejsze jest jednak inne doświadczenie. Płytkę miki częściowo rozwarstwiamy i w rozwarstwienie wsuwamy klin. Jeśli wpuścimy w szczelinę kroplę wody, głębokość rozwarstwienia natychmiast się powiększy. Okazuje się, że efekt ten jest tym większy, im silniejsze jest oddziaływanie między cząsteczkami cieczy i ciała stałego.

**106** Dowiedziawszy się o doświadczeniu Torricellego Blaise Pascal postanowił sprawdzić, czy ciśnienie powietrza zależy od wysokości nad powierzchnią Ziemi. Ponieważ w pobliżu Paryża, gdzie mieszkał Pascal, nie było wystarczająco wysokiego wzniesienia, postanowił on poprosić swego szwagra, pana Périer, mieszkającego w Clermont, o powtórzenie doświadczenia Torricellego u podnóża i na szczycie pobliskiej góry Puy de Dôme (1465 m). Pan Périer zadośćuczynił prośbie Pascala 19 września 1648 roku, a przebieg doświadczeń wykonanych w obecności kilku szanowanych obywateli miasta Clermont opisał szczegółowo w liście z 22 tegoż miesiąca. Ich wynik całkowicie potwierdził hipotezę Pascala i jak pisze pan Périer: „Napełniło nas to takim zachwytem i podziwem i tak nas zdumiało, że dla własnej przyjemności zapragnęliśmy powtórzyć doświadczenie. Toteż wykonałem je jeszcze pięć razy bardzo starannie w różnych punktach wierzchołka góry, zarówno pod dachem w znajdującej się tam małej kaplicy, jak na otwartym powietrzu, zarówno w zaciszu, jak na wietrze, zarówno przy pięknej pogodzie, jak w czasie deszczu i mgły, która nas tam od czasu do czasu nawiedzała, (...) za każdym razem znajdowałem tę samą wysokość poziomu rtęci w rurce równą dwudziestu trzem calom i dwóm liniom, a więc o trzy cale i półtora linii mniej od wysokości w ogrodzie klasztornym (u podnóża góry), co też nas całkowicie zadowoliło”.

**107** Ciecze złożone z lekkich cząsteczek (o masie cząsteczkowej mniejszej niż 1000) mają własności mechaniczne zbliżone do własności wody. Całkowicie odmiennie zachowują się płynne polimery i ich roztwory (typowa masa cząsteczkowa od  $10^5$  do  $10^8$ ). Oto kilka łatwych do zaobserwowania różnic.



Ciecz polimerowa wspina się po powierzchni wirującego pręta. Przy wypływie cieczy z rury pole powierzchni przekroju strumienia może być w najszerszym miejscu nawet pięciokrotnie większe od przekroju rury. Efekt syfonowy w zwykłej cieczy możliwy jest tylko wtedy, gdy jeden koniec rury jest w niej zanurzony. W cieczy polimerowej występuje nawet przy kilkucentymetrowym odstępnie między rurą i powierzchnią cieczy. Przy przepływie z grubej rury do cieniwej w cieczy polimerowej powstają wiry, w których „uwięziona” zostaje część cieczy.

**108** Światło rozchodzące się w substancji nieaktywnej optycznie równoległe do kierunku pola magnetycznego doznaje skręcenia płaszczyzny polaryzacji o kąt proporcjonalny do długości przebytej drogi i wartości pola magnetycznego. Kierunek i wartość kąta zależą od rodzaju substancji. Zjawisko odkrył Michael Faraday w 1846 r.



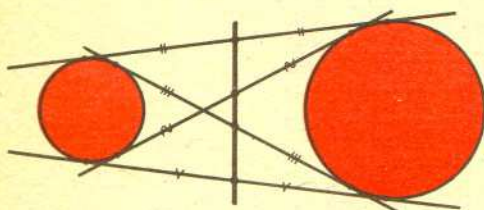
**109** Gdy Księżyc zasłoni Słońce, to staje się widoczna korona słoneczna — bardzo słabo świecąca, najwyższa warstwa atmosfery Słońca. W przyrządzie służącym do obserwacji korony poza zaćmieniami, tzw. koronografie, przesłania się obraz tarczy Słońca specjalną diafragmą uzyskując ten sam efekt. Jednak oszukałby się ten, kto chciałby samodzielnie skonstruować koronograf. Przyrząd ten, aby działał zgodnie z przeznaczeniem, musi spełniać dość fantastyczne warunki co do czystości optyki, skuteczności wyeliminowania rozproszonego światła z wnętrza tubusa, atmosfera wokół obserwatorium również musi być szczególnie czysta itd. Nie jest łatwo te warunki spełnić, ale przedsięwzięcie oplaca się, dając możliwość obserwacji korony w dowolnej chwili.

**110** Promienie świetlne wychodzące z jednego z ognisk elipsy po odbiciu skupiają się w drugim ognisku. Wykorzystano tę własność w układach pompujących niektórych typów laserów. Pompowanie polega na odpowiednio szybkim wzbudzeniu wielu atomów ośrodka, w którym zachodzi akcja laserowa. Pręt, np. rubinowy, i liniową lampę błyskową umieszcza się wzdłuż ognisk rury o przekroju eliptycznym. W ten sposób do pompowania wykorzystywana jest cała energia błysku.

**111** Złożenie 1 854 237 symetrii środkowych jest symetrią środkową (tak jest zresztą dla każdej nieparzystej liczby symetrii środkowych).

**112** Eugene Shoemaker obliczył, że częstość zderzeń Ziemi z asteroidami lub kometami jest odwrotnie proporcjonalna do energii wydzielanej w czasie zderzeń. Mniej więcej co roku zdarza się meteor o energii 20 kiloton TNT. Meteor o energii 12 megaton, taki jak meteor tunguski — może się pojawić co około 300 lat. Raz na tysiąc lat meteor o energii 50 megaton — takie meteory po zderzeniu z Ziemią pozostawiają krater o kilkukilometrowych średnicach, jak np. Diabolo Crater w Arizonie o średnicy 1200 m i głębokości 175 m lub Chubb Crater w Kanadzie o średnicy 3400 m. Zapewne największym znanym kraterem meteorowym jest tzw. depresja Popigajaska na Syberii o średnicy 100 km, powstała 30 mln lat temu. Ocenia się, że energia wydzielona w czasie wybuchu mogła być rzędu  $10^{30}$  ergów, czyli około jednej tysięcznej energii wyświecanej przez Słońce w ciągu sekundy.

**113** Środki odcinków wspólnych stycznych dwóch okręgów (o końcach w punktach styczności) leżą na jednej prostej.



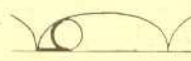
**114** Statek wpływający do ujścia rzeki doznaje silnego hamowania, którego przyczyną jest wzbudzenie fal na powierzchni rozdzielającej wodę morską (słoną) i rzeczną (słodką i lżejszą od morskiej). Podobnego typu fale mogą być wzbudzone również na powierzchniach rozdzielających obszary o różnej gęstości w oceanie. Amplituda takich fal sięga czasami kilkudziesięciu metrów, co może znacznie utrudnić poruszanie się okrętów podwodnych.

**115** Niektórzy nazywają twierdzenie o trzech ciągach (jeśli  $a_n \leq c_n \leq b_n$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$ , to ciąg  $(c_n)$  jest zbieżny i  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ ) twierdzeniem

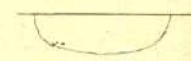
o milicjantach i formułują je tak: Jeśli znajdziesz się między dwoma milicjantami idącymi do tego samego komisariatu, to też tam trafisz.

**116** Droga Mleczna przesłania nam około 1/5 powierzchni całego nieba, tzn. przez grubą warstwę gazu i pyłu leżącą w płaszczyźnie naszej Galaktyki nie jesteśmy w stanie widzieć innych galaktyk. Ale nie jest to prawda stuprocentowa. W 1968 r. włoski astronom Paolo Maffei odkrył w gwiazdozbiorze Kasjopei dwie galaktyki, które — gdyby nie Droga Mleczna — należałyby do najjaśniejszych galaktyk na niebie. Jaśniejsza z nich, Maffei 1, jest wielką galaktyką eliptyczną, druga — Maffei 2 — spiralną. Ocenia się, że Maffei 1 leży w odległości 2–3 Mpc i poza Droga Mleczną miałaby jasność 6,3 mag.

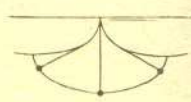
**117** Cykloida to krzywa, którą zakreśla punkt okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej (rys. 1). Punkt materialny poruszający się pod wpływem siły ciężkości po odwróconym łuku cykloidy (rys. 2) jest idealnym wahadłem, jego okres wahań nie zależy od amplitudy (zwykle wahadło kołowe jest tylko przybliżeniem wahadła idealnego). Możemy spowodować ruch zwykłego wahadła po cykloidzie ograniczając ruchy tego wahadła dwoma łukami cykloidy (rys. 3).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

**118** Zatrudniony jako lekarz na holenderskim statku płynącym na Jawę (w 1840 roku) Juliusz Robert Mayer zauważył, że płynąca z żył krew jest znacznie jaśniejsza niż w klimacie chłodnym (w Europie) i przypomniał kolorem krew tętniczą. Tłumaczył to zmniejszeniem intensywności procesów utleniania w organizmie wobec zmniejszenia ilości ciepła potrzebnej do utrzymania stałej temperatury ciała. Spostrzeżenie to, wraz z opowiadaniem marynarzy, że po burzy morze jest cieplejsze, naprowadziło Mayera na myśl sformułowania zasady zachowania energii (wyprzedził Joule'a i Helmholtza). Praca pt. „Uwagi o siłach nieożywionej przyrody”, w której została sformułowana zasada zachowania energii, ukazała się w 1842 roku w „Rocznikach chemii i farmacji” i została zignorowana przez ówczesnych fizyków.

**119** Oto bardzo ciekawy przykład zastosowania logiki w brydżu. Jest on trochę nietypowy dla brydża, a to dlatego, że przedstawione w nim rozumowanie nie zawiera elementów probabilistycznych. Gracz *W* ma w pikach ADW98, w kierach KW, w karach 7, w treflach AKD62, a gracz *E* ma w pikach K63, w kierach AD62, w karach 8532, w treflach 73. Licytacja: *W* — 2pik, *N* — 5 karo, *E* — 6 pik i trzy pasy. *N* zaatakował królem karo. *S* przejął go asem i zagrał w pika. Z ręki dziesiątka — *N* dołożył karo. Jak należy dalej rozgrywać?

Istnieje sposób rozgrywki dający pewność wygranej. Wiemy, że *N* ma siedem kar — wynika to zarówno z licytacji, jak i z zagrania gracza *S* w drugiej lewie: *S* — mając pięć pików odwróciłby w karo, aby uzyskać przewagę atutową. *N* — mając siedem kar — ma co najwyżej sześć kierów, czyli *S* ma co najmniej jednego kiera. Możemy więc zagrać króla kier. Jeżeli *N* nie dołoży, wygramy łatwo wyrzucając błotki trefl z ręki na kiery ze stołu. Natomiast jeśli *N* dołoży, to może mieć co najwyżej pięć trefli, a więc *S* ma co najmniej jednego trefla i możemy zagrać asa trefl. Jeżeli *N* nie dołoży do asa trefl, to grę łatwo wygramy przebijając błotkę trefl królem pik i impasując dziesiątkę. Jeśli *N* dołoży do asa trefl, to ma co najwyżej pięć kierów — a więc *S* ma co najmniej dwa — i możemy zagrać waleta kier. I znów, jeśli *N* nie dołoży do waleta, grę łatwo wygramy. Jeśli natomiast dołoży, to ma co najwyżej cztery trefle, czyli *S* ma ich co najmniej dwa. Możemy zagrać teraz króla trefl. Jeżeli *N* dołoży trefla, wygramy grę przebijając błotkę trefl królem pik i impasując dziesiątkę pik. Jeżeli *N* nie dołoży do trefla, zgramy damę trefl i gramy na obustronne prebitki. Przykład powyższy pochodzi od południowoafrykańskiego teoretyka brydżowego Aleca Trauba.

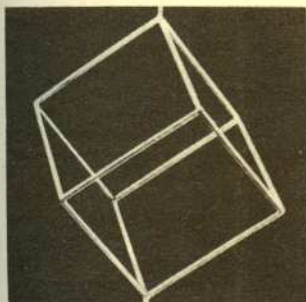


**120** Najwyższą górą w Układzie Słonecznym jest prawdopodobnie Olympus Mons, wygasły wulkan leżący w Amazonis na Marsie. Wznosi się on 25 km nad poziom okolicznego gruntu. Jego zbocza są jednak bardzo łagodne — u podstawy ma on około 600 km średnicy — zatem uprawianie alpinizmu nie wchodzi tu w rachubę.

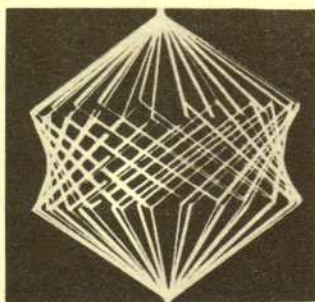
**121** Miony to cząstki elementarne o własnościach elektronu i 200 razy większej masie. Spoczywające w laboratorium miony rozpadają się średnio po czasie 2,2 mikrosekundy. Średni czas życia mionów o pędzie 1,27 GeV/c krążących w pierścieniu akceleratora wynosi 26,2 mikrosekundy, co z dokładnością 2% zgadza się z przewidywaniem teorii względności.

**122** *Matematyka: klasa 8.* Autorzy: Henryk Kąkol, Adam Łomnicki, Zbigniew Powązka, Stanisław Wołodzko. Rozdział: Objętość walca, stożka i kuli. Zadanie 25: „Opisz figurę, która powstanie z obrotu sześcianu wokół jego przekątnej. Znajdź jej objętość, gdy krawędź sześcianu ma długość  $a$ ”.

*Kalejdoskop Matematyczny.* Autor: Hugo Steinhaus, Rozdział VII: „Gdy zrobimy model sześcianu z białego drutu (rys. 1), a następnie ofotografujemy kilka razy na tej samej kliszy, obracając przed każdym zdjęciem o ten sam kąt dookoła wielkiej przekątnej, otrzymamy obraz (rys. 2) złożony z dwóch stożków i hiperboloidy obrotowej”.



Rys. 1



Rys. 2

P. S. W uzupełnieniu podajemy odpowiedź do zadania (brak jej w podręczniku). Objętość bryły obrotowej (obliczona przy użyciu rachunku całkowitego) jest równa  $\frac{22\pi}{9\sqrt{3}} a^3$ .

**123** Ogromna większość gwiazdozbiorów, zwłaszcza na północnej półkuli nieba, ma nazwy pochodzące z mitologii greckiej. Ciekawe więc, że nazwa jednego z gwiazdozbiorów ma pochodzenie czysto polskie. Mianowicie Jan Heweliusz nadał niewielkiemu obszarowi nieba nazwę Tarczy Sobieskiego, dla upamiętnienia zwycięstwa polskiego króla pod Wiedniem. Nazwę tę gwiazdozbiór nosił do 1922 r., kiedy to Międzynarodowa Unia Astronomiczna zmieniła ją na — po prostu — Tarcza (*Scutum*). Gwiazdozbiór leży w Drodze Mlecznej i góruje około północy w czerwcu.

**124** Najbardziej bezpośrednim dowodem na istnienie monopola magnetycznego byłaby obserwacja związanego z nim pola magnetycznego. Zmianę strumienia magnetycznego towarzyszącą przelotowi monopola można zarejestrować np. mierząc prąd indukowany w pętli z nadprzewodnika. Jeśli przez pętlę przechodzi elementarny ładunek magnetyczny, to strumień pola magnetycznego zmienia się o  $4 \cdot 10^{-11}$  T/cm<sup>2</sup>. W lutym 1982 r. w Stanfordzie B. Cabrera zaobserwował skok wskazań przyrządów w działającym na tej zasadzie układzie i zinterpretował go jako wynik przejścia przez pętlę monopola magnetycznego. Podstawową zaletą układu było bardzo dobre ekranowanie od zewnętrznych wpływów za pomocą ekranów nadprzewodzących (tło nie przekraczało 1% zaobserwowanego sygnału). Dalsze obserwacje, także innych udoskonalonych detektorów, nie przyniosły nowych rezultatów.

**125** Wielomian interpolacyjny stopnia  $n$  dla funkcji  $f$  to wielomian, który w punktach  $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$  (zwanymi węzłami) przyjmuje te same wartości co funkcja  $f$ . Naturalnym pytaniem jest, przy jakim wyborze węzłów wielomiany interpolacyjne coraz lepiej przybliżają wyjściową funkcję. Okazuje się, że wybór węzłów równoodległych nie jest najlepszy, a jest wręcz zły nawet dla tak porządnej funkcji jak wartość bezwzględna na przedziale  $\langle -1, 1 \rangle$ . Twierdzenie Bernsteina: Niech  $w_n$  będzie wielomianem stopnia  $n$ , takim że

$$w_n\left(\frac{n-2k}{n}\right) = \left|\frac{n-2k}{n}\right| \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n.$$

Wtedy dla żadnego  $x \neq -1, 0, 1$  ciąg  $w_n(x)$  nie jest zbieżny do  $|x|$ . Jeśli natomiast jako węzły wielomianu weźmiemy tzw. węzły

$$\text{Czebyszewa, tzn. } x_k^{(n)} = \cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \quad \text{dla } k = 0, \dots, n,$$

to takie wielomiany interpolacyjne będą zbieżne (i to jednostajnie) dla dużej klasy funkcji, nawet dla takich funkcji jak

$$f_m(x) = \sqrt[m]{|x|} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

**126** W XVII w. niektórzy uczeni sądzili, że płamy na Słońcu są to po prostu cienie rzucane przez małe planety. Miały one okrażać Słońce w niewielkiej odległości i w czasie licznych przejść przed jego tarczą dawać zjawisko plam słonecznych. Niefortunne planety otrzymały nawet nazwy: jedni nazywali je „Sidera Borbonica”, inni zaś „Sidera Austriae”. Znany fizyk niemiecki Otton Guericke w dziele poświęconym opisowi kul magdeburskich wiele miejsca poświęcił propagowaniu systemu kopernikańskiego. W książce tej zamieszczony jest rysunek układu heliocentrycznego, na którym znajduje się aż osiem planet (znano ich wówczas tylko sześć, bowiem Uran, Neptun i Pluton nie były jeszcze odkryte). Wśród owych ośmiu planet cztery to planety dolne — w kolejności od Słońca: „planety Bourbonów”, Merkury i Wenus.

**127** Każdy z punktów okręgu tocącego się wewnątrznie po okręgu o dwukrotnie większej średnicy porusza się prostoliniowo.



**128** Ziemia i Wenus zwane są często planetami bliźniaczymi z powodu niewielkich różnic w ich masach i rozmiarach. Albedo spowitej w gęstą otoczkę chmur Wenus jest niemal dwukrotnie większe niż albedo naszej planety. Czy w związku z tym Wenus oglądana z Ziemi jest jaśniejsza niż Ziemia oglądana z Wenus? Otóż nie. Na niebie wenusjańskim Ziemię najkorzystniej widać w opozycji (Ziemia jest dla niej planetą górną) i wtedy widoczna jest cała jej tarcza. Wenus osiąga maksymalny blask dla obserwatora ziemskiego znajdując się między złączeniem dolnym a maksymalnymi elongacjami. Jednak w momentach tych widzimy zaledwie wąską jej sierp, przez co całkowita ilość światła słonecznego odbita ku Ziemi jest mniejsza niż odbita przez Ziemię ku Wenus.

**129** Językiem o alfabecie  $A$  nazywamy dowolny zbiór skończonych ciągów (zwanymi słowami) o elementach z  $A$ . Jeśli wraz z każdym słowem  $a_1 a_2 \dots a_n$  do języka należą wszystkie podśłowa  $a_k a_{k+1} \dots a_{m-1} a_m$ , gdzie  $1 \leq k \leq m \leq n$ , to język jest nasycony. Oznaczmy przez  $J_n$  zbiór słów języka nasyconego  $J$  o długości  $n$ . Oczywiście  $J$  jest sumą zbiorów  $J_n$ . Jeśli istnieje taka stała  $c$ , że każdy zbiór  $J_n$  ma co najwyżej  $c$  elementów, to oczywiście dla pewnego  $m$  zbiór  $J_m$  ma co najwyżej  $m$  elementów. W 1978 roku Bergman wykazał, że twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe. Dowód jest dość elementarny, ale długi. Jak pokazuje poniższy przykład, nie wystarczy założenie, że dla pewnego  $m$  zbiór  $J_m$  ma co najwyżej  $m+1$  elementów.

Niech  $A = \{a, b\}$  i niech  $J$  będzie językiem złożonym ze słów zawierających co najwyżej jedną literę  $b$ . Jest to język nasycony i każdy zbiór  $J_m$  ma dokładnie  $m+1$  elementów, więc stała  $c$  nie istnieje.



**130** Ogromna większość ruchów ciała Układu Słonecznego odbywa się w kierunku tzw. prostym, w którym planety obiegają Słońce, wirują i w którym większość satelitów obiega swoje planety. Oglądane z północnej półkuli nieba ruchy te odbywałyby się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Zasadzie tej nie podlega Uran ze swoimi księżycami — płaszczyzna równikowa tego systemu jest prawie prostopadła do płaszczyzny okosłonecznej orbity Urana. Ciekawe jednak, że Jowisz i Saturn mają zarówno satelity o ruchu prostym, jak i wstęcznym. Jowisz wśród 16 satelitów ma cztery wsteczne (*Ananke, Carme, Pasypae i Synope*), Saturn zaś wśród 17 — jednego (*Phoebe*). Istnienie ich nie jest do końca wytłumaczone. Prawdopodobnie księżycy o ruchu prostym powstały razem ze swoją planetą w jej sąsiedztwie, natomiast o ruchu wstęcznym powstały gdzie indziej i zostały później przez planetę pochwycone.

**131** Dlaczego sto osób śpiewa sto razy głośniej niż jedna? Rzecz nie jest oczywista: przecież natężenie dźwięku jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy drgań. Czysty dźwięk emitowany przez  $n$ -tego śpiewaka daje się opisać równaniem

$A_n(t) = A \cdot \sin(\omega t + \Phi_n)$ , gdzie  $A$  jest amplitudą,  $\frac{\omega}{2\pi}$  to częstotliwość, wreszcie  $\Phi_n$  to przesunięcie fazowe,  $0 \leq \Phi_n \leq 2\pi$ . Dość rozsądne jest przypuszczenie, że  $\Phi_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Po zsumowaniu  $m$  takich wyrażen otrzymamy dla  $m$ -osobowego chóru:

$$C(t) = A \cdot \sum_{n=1}^m \sin(\omega t + \Phi_n) = A \cdot \left( \sum_{n=1}^m \sin \Phi_n \right) \cdot \cos \omega t + A \cdot \left( \sum_{n=1}^m \cos \Phi_n \right) \cdot \sin \omega t.$$

Przyjmijmy dalej, że  $A = 1$ . Zauważmy teraz, że

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega t \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\text{gdzie } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zatem kwadrat amplitudy dla chóru wynosi:

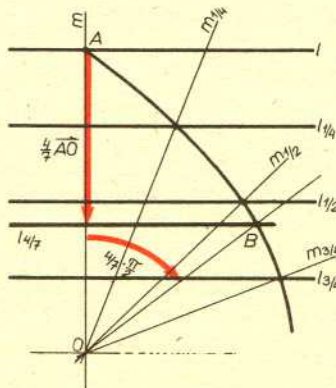
$$C^2 = \left( \sum_{n=1}^m \sin \Phi_n \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^m \cos \Phi_n \right)^2 = m + \sum_{i \neq j} \sin \Phi_i \sin \Phi_j + \sum_{i \neq j} \cos \Phi_i \cos \Phi_j.$$

Jednakże ostatnie dwa wyrażenia są zmiennymi losowymi o zerowej średniej. Dlatego średnio  $C^2$  ma wartość  $m$  — tak, jak powinno być.

**132** Czerwony olbrzym 18 wielkości gwiazdowej odkryty w gwiazdozbiornie Wagi jest najdalszą znaną gwiazdą należącą do naszej Galaktyki. Jej odległość oceniana jest na około 400 000 lat świetlnych, czyli czterokrotnie więcej, niż wynosi średnica Galaktyki. Gwiazda ta prawdopodobnie porusza się po torze zbliżonym do toru Obłoków Magellana i — być może — pochodzi z któregoś z nich. Jeżeli uda się odkryć więcej tak odległych gwiazd, to z analizy ich ruchu możliwe będzie „bezpośrednie” wyznaczenie masy naszej Galaktyki.

**133** Hel pod normalnym ciśnieniem pozostaje cieczą aż do temperatury absolutnego zera. Podobnie atomy wodór pozostałyby w stanie gazowym aż do temperatury absolutnego zera, gdyby nie fakt, iż w przyrodzie występuje wodór molekularny, który skrapla się już w temperaturze kilkudziesięciu kelwinów. Aby zapobiec powstawaniu molekuł  $H_2$ , wykorzystuje się fakt, że w cząsteczce łączą się mogą tylko atomy wodoru o spinach ustawionych antyrównolegle. Przed ochłodzeniem porządkuje się więc spiny w jednym kierunku za pomocą silnego pola magnetycznego. W ten sposób zbadano już własności gazowego wodoru do temperatury kilkuset milikelwinów. Jak dotąd, nie zaobserwowano jednak oczekiwanego przejścia w stan nadciekły (nadlotny?).

**134** Siedmiokąta foremnego nie można skonstruować środkami klasycznymi (cyrkiel i liniałem). Wiemy o tym z twierdzenia Gaussa. Siedem jest wprawdzie liczbą pierwszą, ale nie jest postaci  $2^{2^k} + 1$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą nieujemną. Środkami klasycznymi można wykonać jedynie przybliżoną konstrukcję siedmiokąta foremnego. Dobrym przybliżeniem boku takiego siedmiokąta wpisanego w koło o promieniu  $r$  jest wysokość trójkąta równobocznego o boku  $r$ .



Mając jednak do dyspozycji kwadratyse Hippiasza możemy użyć jej do dokładnej konstrukcji siedmiokąta foremnego. Kwadratyse Hippiasza wyznaczają dwie prostopadłe proste  $l$  i  $m$  przecinające się w punkcie  $A$  i punkt prostej  $m$  różny od  $A$ . Jest ona wówczas zbiorem punktów przecięcia wszystkich par  $(l_i, m_i)$  prostych, z których pierwsza powstaje z prostej  $l$  przez przesunięcie o wektor  $\frac{t}{AO} \vec{AO}$ , a druga z prostej  $m$  przez obrót dokoła punktu  $O$  o kąt o mierze  $\frac{\pi}{2} t$ , gdzie  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Oznaczając przez  $B$  punkt przecięcia kwadratyse Hippiasza z prostą  $l_{1/7}$  (do jej zbudowania wystarczy cyrkiel i liniał) otrzymujemy  $\sphericalangle AOB$  równy siódmej części kąta pełnego. Dokończenie konstrukcji jest oczywiste. Łatwo zauważyć, że kwadratyse Hippiasza można użyć do podziału dowolnego kąta na dowolną liczbę równych części.

**135** Swą pierwszą pracę poświęconą szczególnej teorii względności rozpoczął Einstein od zdania: „Wiadomo, że elektrodynamika Maxwella, w obecnym jej rozumieniu — w zastosowaniu do ciał w ruchu, prowadzi do pewnych asymetrii, które nie wydają się wynikać z samej istoty zjawiska” (*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Physik 17 (1905) 891) i dalej przeprowadza analizę pojęcia równoczesności oraz dyskutuje względność czasu i długości. Większość kursów szczególnej teorii względności, zwłaszcza popularnych, poprzestaje jednak na wyprowadzeniu transformacji Lorentza dla czasu i współrzędnych przestrzennych nie wspominając o polach elektrycznym i magnetycznym. Poniżej uzupełniamy to niedopatrzenie. Pole elektryczne i magnetyczne ( $E'$  i  $B'$ ) w układzie  $O'$  poruszającym się z prędkością  $\beta = \frac{v}{c}$  względem układu  $O$

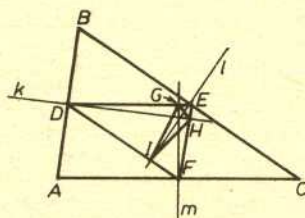
dane są wyrażeniami

$$E' = \gamma(E + \beta \times B) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta(\beta \cdot E),$$

$$B' = \gamma(B - \beta \times E) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \beta(\beta \cdot B),$$

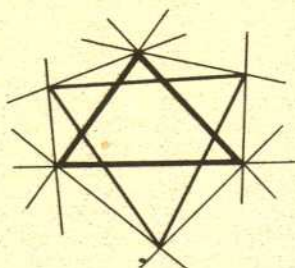
w których  $E$  i  $B$  są wektorami pól w układzie  $O$ , a  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

**136** Symetralne boków dowolnego trójkąta  $ABC$  są wysokościami w trójkącie  $DEF$  utworzonym przez ich przecięcia z bokami trójkąta  $ABC$ , a dwusiecznymi kątów (wewnętrznych lub zewnętrznych) w trójkącie  $GHI$  utworzonym przez ich przecięcia z bokami trójkąta  $DEF$ .





**137** Podzielmy wewnętrzne kąty dowolnego trójkąta na trzy równe części, punkty przecięcia linii podziału sąsiadujących odpowiednio z tym samym bokiem trójkąta są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Tak samo jest, jeśli podzielimy zewnętrzne kąty trójkąta na trzy równe części.



**138** Gwiazdy „stałe” i „zmienne” to nie są przeciwieństwami. „Stale” to inaczej nieruchome, „zmiennie” zaś to zmieniające swoją jasność. Z kolei „gwiazdy błędzące” to w ogóle nie są gwiazdy, lecz po prostu planety. Również „gwiazdy spadające” to dawna nazwa zjawiska towarzyszącego wtargnięciu ciała meteorowego do atmosfery ziemskiej. „Gwiazda Poranna” i „Gwiazda Wieczorna” też nie jest gwiazdą. Obie te nazwy oznaczają Wenus, która, jak wiemy, widoczna bywa niekiedy rano, a niekiedy wieczorem.

**139** Wybierzmy losowo liczbę z rocznika statystycznego. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsza cyfra znacząca jest jedynką? Wbrew zdrowemu rozsądkowi wynosi ono około 0,3. Jeśli ktoś nie wierzy, niech przeprowadzi stosowny eksperyment.

Dla wyjaśnienia zauważmy, że liczbę  $Y$  można uważać za zmienną losową o bardzo „rozmytym” rozkładzie. Pierwsza cyfra znacząca równa się 1, gdy  $10^k \leq Y < 2 \cdot 10^k$  dla pewnego  $k$ , czyli  $k \leq \log Y < \log 2 + k$  ( $\log a$  oznacza logarytm dziesiętny  $a$ ). Jeśli teraz  $X$  jest zmienną losową  $\log Y$  zredukowaną modulo 1, to można rozsądnie przypuszczać, że  $X$  ma rozkład prawie jednostajny na odcinku  $\langle 0,1 \rangle$  — tu można sobie wyobrazić ruletkę, gdzie  $\log Y$  jest liczbą obrotów. Pierwsza cyfra znacząca liczby  $Y$  jest jedynką, gdy  $X \in \langle 0, \log 2 \rangle$ , a prawdopodobieństwo tego zdarzenia przy rozkładzie jednostajnym wynosi  $\log 2 = 0,30103 \dots$ . Podobnie pierwsza cyfra znacząca wynosi  $m$ , gdy  $X \in \langle \log m, \log(m+1) \rangle$ , na przykład cyfry mniejsze od pięciu będą się pojawiać z prawdopodobieństwem bliskim 0,7.

**140** Stała słoneczna (tj. ilość energii słonecznej odbieranej w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni Ziemi prostopadłe do kierunku promieni — wynosi ona  $1,36 \text{ kW/m}^2$ ) nie jest dokładnie stała. Wyniki obserwacji satelitarnych przeprowadzonych w ciągu ostatnich lat wskazują, że wartość stałej słonecznej zmienia się o kilka setnych procenta w czasie cyklu słonecznego. Nieznaczny spadek mocy promieniowania naszej gwiazdy w maksimum aktywności spowodowany jest pojawieniem się dużych grup plam na jej powierzchni.

**141** Gwałtowne ogrzanie pewnych dielektryków (pieroektryków) powoduje powstanie wypadkowego momentu dipolowego. Wygląda to tak, jakby jeden z końców dielektryka (np. turmalinu) ładował się dodatnio, a drugi ujemnie. W dielektrykach takich, w zwykłych temperaturach istnieje wypadkowy moment dipolowy (różny od zera) wynikający z uszeregowania momentów dipolowych cząsteczek. Na powierzchni związane są znajdujące się w powietrzu jony, co całkowicie kompensuje efekt wewnętrznej polaryzacji. Drgania cieplne cząsteczek wywołane gwałtownym ogrzaniem niszczą wewnętrzne uporządkowanie momentów dipolowych pozostawiając bez zmian ładunki związane na powierzchni i wywołując tym samym „polaryzację przez ogrzanie”.

**142** Iloczyn  $n$  kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez iloczyn pierwszych  $n$  liczb naturalnych, czyli przez  $n!$ . Wynika to natychmiast z tego, że

$$\binom{k+n}{n} = \frac{(k+1)(k+2) \dots (k+n)}{n!}$$

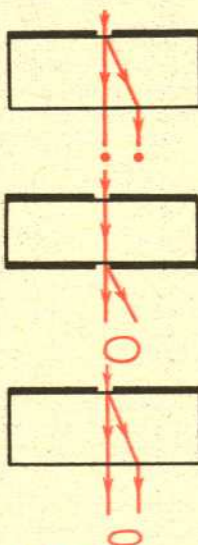
jest liczbą całkowitą.

**143** Każdy trójkąt można podzielić na cztery trójkąty równoramienne. Każdy trójkąt osiokrągły można podzielić na trzy trójkąty równoramienne. Każdy trójkąt prostokątny można podzielić na dwa trójkąty równoramienne. Jeśli ostrokątny trójkąt równoramienny daje się podzielić na dwa trójkąty równoramienne, to stosunek jego podstawy do ramienia jest złotą proporcją.

**144** Skupiając światło słoneczne za pomocą układu zwierciadeł i soczewek nie można otrzymać temperatury wyższej niż temperatura powierzchniowa Słońca, tj. około  $6000^\circ\text{C}$ . Ogniskując światło laserowe na okuchu paliwa termojądrowego (deuter + tryt) uzyskano już neutrony będące wynikiem syntezy termojądrowej, co oznacza osiągnięcie temperatury około 10 milionów stopni.

**145** Tradycyjne teleskopy z paraboloidalnym lustrem mają jedną zasadniczą wadę — małe użyteczne pole widzenia. Przyczyną jest fakt, że lustro takie teoretycznie skupia w jednym punkcie tylko wiązkę światła równoległą do swojej osi. Dość genialnym wynalazkiem jest zatem tzw. kamera Schmidta, za pomocą której można wykonywać poprawne zdjęcia nieba w kącie widzenia kilku stopni. Jej lustro jest sferyczne i większe od płyty korekcyjnej umieszczonej w środku jego krzywizny. Płyta korekcyjna o specjalnie dobranym kształcie kompensuje aberrację sferyczną lustra dla wszelkich padających na nie wiązek światła. W rezultacie przyrząd taki właściwie nie ma osi optycznej i całe pole widzenia określone przez geometrię kamery jest wiernie odwzorowywane na kliszy fotograficznej.

**146** Promień światła padający prostopadłe na szklaną płytkę przechodzi przez nią bez załamania.



Gdy płytka jest wycięta z kryształu, padający promień może podzielić się na dwa: jeden przechodzący bez załamania, a drugi załamujący się na obu powierzchniach płytki.

Dla niektórych kryształów (np. cukru, kwasu winowego czy siarki rombowej) obserwuje się zjawiska przewodzone przez Hamiltona w 1832 r.

Promień światła wychodzący z płytki może podzielić się na nieskończenie wiele promieni tworzących powierzchnię stożka. Na ekranie ustawionym za płytką widoczny jest wtedy pierścień powiększający się w miarę oddalania ekranu od płytki.

Przy innym sposobie wycięcia płytki w kryształ powstanie stożkowa powierzchnia promieni załamanych. Promienie te po opuszczeniu płytki tworzą powierzchnię walca. Dla kryształu kwasu winowego o grubości 15 mm walec ma średnicę 1 mm.

**147** Dowolne trzy proste przecinające się w jednym punkcie mogą być symetrycznymi boków pewnego trójkąta. Mogą też być wysokościami pewnego (na ogół innego) trójkąta. Nie zawsze jednak mogą być dwusiecznymi kątów wewnętrznych jakiegokolwiek trójkąta — dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta zawsze bowiem dzielą płaszczyznę na sześć kątów ostrych.

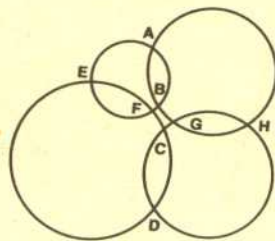
**148** Możliwość formowania impulsów światła trwających ułamki pikosekund ( $1 \text{ pikosekunda} = 10^{-12} \text{ s}$ ) przyniosła duży postęp w badaniu ultraszybkich procesów. Najczęściej stosowana jest tzw. metoda próbkowania. Pikosekundowy impuls dzieli się na dwa impulsy: silny i słaby. Pierwszy wywołuje zjawiska, które są następnie badane drugim. Opóźnienie między impulsami może być dowolnie regulowane przez wydłużenie drogi jednego z nich. Pierwszy impuls może np. wzbudzić cząsteczkę w badanej próbce. W wyniku tego zdolność absorpcyjna próbki zmaleje, bo wzbudzone cząsteczki nie mogą zaabsorbować następnego kwantu światła. Po pewnym czasie przechodzą one ponownie do stanu podstawowego. Słabe impulsy próbkujące, coraz bardziej opóźniane, będą więc coraz silniej absorbowane. Mierząc ich osłabienie można wyznaczyć czas życia stanu wzbudzonego.



**149** Zaćmienie Słońca widoczne w Chinach 22 X 2137 r. p.n.e. jest prawdopodobnie najstarszym zanotowanym w kronikach. Wzmianka kronikarska mówi o tym, jak za panowania cesarza Chung Kianga astronomowie dworscy Hi i Ho nie przewidzieli, że zaćmienie to nastąpi, a podczas samego zaćmienia byli tak pijani, że nie mogli dopełnić rytuału polegającego na odstraszaniu czarnego smoka pożerającego Słońce biciem w bębny, gongi i strzelaniem z łuku. Rozgniewany cesarz kazał niedbałym astronomów zabić. Najstarsze zaćmienie Księżyca, o którym jest wzmianka w kronikach chińskich, przypada na 1136 r. p.n.e.



**150** Cztery dowolne okręgi przecinające się jak na rysunku z okładki mają tę własność, że jeśli punkty  $A, B, C, D$  leżą na jednym okręgu lub na jednej prostej, to punkty  $E, F, G, H$  też leżą na jednym okręgu lub jednej prostej. Podobną własność mają także czwórki punktów  $A, E, D, H$  i  $B, F, C, G$ .



## Klub 44



Redaguje dr Andrzej NADOLNY

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

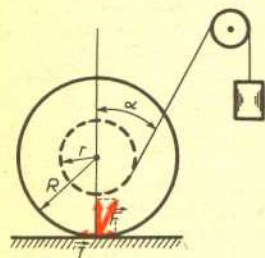
### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1986

#### Przypominamy treść zadań:

**23.** Na poziomym podłożu spoczywa szpula o masie  $M$  z nawiniętą nicią, której wolny koniec jest przetrzeczony przez obracający się bez tarcia błoczek i obciążony ciężarkiem o masie  $m$ . Duży promień szpuli wynosi  $R$ , promień jej rdzenia —  $r$ . Kąt  $\alpha$  ma taką wartość, że  $\sin \alpha = r/R$ . Współczynnik tarcia statycznego szpuli o podłoże wynosi  $f$ , współczynnik tarcia kinetycznego —  $f_k$ .



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 19 /WT=2,20/ i 20 /WT=2,85/ z numeru 12/1985

Piotr Baża	- Toruń	40,86pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	27,86pkt
Dzierżysław Lipniacki-Lublin		18,82pkt
Aleksander Surma	- Myszków	16,60pkt
Mirosław Semla	- Opole	13,63pkt
Maciej Stasiak	- Człuchów	12,15pkt
Wiesław Stochmal	- Szczecin	11,88pkt
Zbigniew Lipowczan-	Katowice	11,81pkt
Anna Gluza	- Toruń	11,00pkt
Mariusz Surma	- Kielce	10,18pkt

Jakie warunki muszą być spełnione, aby układ znajdował się w równowadze? Czy możliwe jest opadanie ciężarka ze stałą prędkością bez zmiany punktów styku szpuli z podłożem? Jeżeli tak, to jakie warunki muszą być spełnione w tym przypadku?

**24.** W oparciu o przytoczone niżej dane obliczyć przybliżoną wartość temperatury, jaka panowałaby na powierzchni Ziemi, gdyby w ogóle nie ogrzewało jej Słońce. Dane: pionowy gradient temperatury w skorupie ziemskiej —  $2 \cdot 10^{-2}$  K/m, współczynnik przewodnictwa cieplnego skorupy ziemskiej —  $3$  W/K · m, stała Stefana-Boltzmann —  $6 \cdot 10^{-8}$  W/m<sup>2</sup> · K<sup>4</sup>.

**23.** Oznaczmy przez  $F$  siłę, jaką nić działa na szpulę, ( $F = mg$ ) — patrz rysunek. Pionowa składowa tej siły zmniejsza siłę nacisku szpuli na podłoże, pozioma zaś w stanie równowagi jest równoważona przez siłę tarcia  $T$ . Stąd otrzymujemy dla przypadku statycznego

$$mg \sin \alpha \leq f_g (M - m \cos \alpha),$$

co po przekształceniu daje nam poszukiwany warunek równowagi:

$$m \leq \frac{fM}{f \cos \alpha + \sin \alpha} \quad \left( \sin \alpha = \frac{r}{R} \right).$$

W przypadku kinetycznym współczynnik  $f$  zostaje zastąpiony przez  $f_k$ , znika też znak nierówności. Warunek opadania ciężarka ze stałą prędkością bez zmiany punktów styku szpuli z podłożem ma więc postać

$$m_k = \frac{f_k M}{f_k \cos \alpha + \sin \alpha}.$$

Można wykazać, że jeśli  $f_k \leq f$ , to  $m_k$  spełnia również warunek pierwszy, czyli przy ciężarku o masie  $m_k$  układ może zarówno znajdować się w spoczynku, jak i w stacjonarnym ruchu.

**24.** Gdyby Ziemi nie ogrzewało Słońce, strumień energii promieniowania termicznego Ziemi byłby równy strumieniowi energii dopływającej do powierzchni z jej wnętrza. Gęstość tego strumienia na jednostkę pola powierzchni Ziemi obliczamy jako  $2 \cdot 10^{-2}$  K/m · 3 W/K · m =  $6 \cdot 10^{-2}$  W/m<sup>2</sup>.

Gęstość strumienia energii emitowanego promieniowania termicznego wynosi  $E = \varepsilon \sigma T^4$ , gdzie  $\varepsilon$  — emisyjność powierzchni,  $\sigma$  — stała Stefana-Boltzmann,  $T$  — temperatura bezwzględna. Przyrównanie gęstości obu tych strumieni energii daje po podstawieniu odpowiednich danych

wzór na poszukiwaną temperaturę powierzchni Ziemi:  $T = \sqrt[4]{\frac{10^6}{\varepsilon}}$  K. Wartość  $\varepsilon$  nie wpływa więc

istotnie na wynik: dla  $\varepsilon = 1$  mamy  $T = 32$  K, dla  $\varepsilon = 0,1$  mamy  $T = 56$  K. Temperatura powierzchni Ziemi zawierałaby się prawdopodobnie między tymi wartościami.