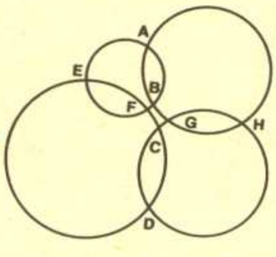
149 Zaćmienie Słońca widoczne w Chinach 22 X 2137 r. p.n.e. jest prawdopodobnie najstarszym zanotowanym w kronikach. Wzmianka kronikarska mówi o tym, jak za panowania cesarza Chung Kianga astronomowie dworscy Hi i Ho nie przewidzieli, że zaćmienie to nastąpi, a podczas samego zaćmienia byli tak pijani, że nie mogli dopełnić rytuału polegającego na odstraszaniu czarnego smoka pożerającego Słońce biciem w bębny, gongi i strzelaniem z łuku. Rozgniewany cesarz kazał niedbałych astronomów zabić. Najstarsze zaćmienie Księżyca, o którym jest wzmianka w kronikach chińskich, przypada na 1136 r. p.n.e.

150 Cztery dowolne okręgi przecinające się jak na rysunku z okładki mają tę własność, że jeśli punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu lub na jednej prostej, to punkty E, F, G, H też leżą na jednym okręgu lub jednej prostej. Podobną własność mają także czwórki punktów A, E, D, H i B, F, C, G.



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji **M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1986

Przypominamy treść zadań:

23. Na poziomym podłożu spoczywa szpula o masie M z nawiniętą nicią, której wolny koniec jest przerzucony przez obracający się bez tarcia bloczek i obciążony ciężarkiem o masie m. Duży promień szpuli wynosi R, promień jej rdzenia — r. Kąt α ma taką wartość, że $\sin\alpha = r/R$. Współczynnik tarcia statycznego szpuli o podłoże wynosi f, współczynnik tarcia kinetycznego — f_k. Jakie warunki muszą być spełnione, aby układ znajdował się w równowadze? Czy możliwe jest opadanie ciężarka ze stałą prędkością bez zmiany punktów styku szpuli z podłożem? Jeżeli tak, to jakie warunki muszą być spełnione w tym przypadku?

24. W oparciu o przytoczone niżej dane obliczyć przybliżoną wartość temperatury, jaka panowałaby na powierzchni Ziemi, gdyby w ogóle nie ogrzewało jej Słońce. Dane: pionowy gradient temperatury w skorupie ziemskiej — $2\cdot10^{-2}$ K/m, współczynnik przewodnictwa cieplnego skorupy ziemskiej — 3 W/K · m, stała Stefana-Boltzmanna — $6\cdot10^{-8}$ W/m² · K⁴.

23. Oznaczmy przez F siłę, jaką nić działa na szpulę, ($F = m$ g) — patrz rysunek. Pionowa składowa tej siły zmniejsza siłę nacisku szpuli na podłoże, pozioma zaś w stanie równowagi jest równoważona przez siłę tarcia T. Stąd otrzymujemy dla przypadku statycznego

$$mg\sin\alpha \leqslant fg\,(M - m\cos\alpha),$$

co po przekształceniu daje nam poszukiwany warunek równowagi:

$$m \leqslant \frac{fM}{f\cos\alpha+\sin\alpha} \qquad \left(\sin\alpha = \frac{r}{R}\right).$$

W przypadku kinetycznym współczynnik f zostaje zastąpiony przez f_k, znika też znak nierówności. Warunek opadania ciężarka ze stałą prędkością bez zmiany punktów styku szpuli z podłożem ma więc postać

$$m_k = \frac{f_k M}{f_k\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Można wykazać, że jeśli $f_k \leqslant f$, to m_k spełnia również warunek pierwszy, czyli przy ciężarku o masie m_k układ może zarówno znajdować się w spoczynku, jak i w stacjonarnym ruchu.

24. Gdyby Ziemi nie ogrzewało Słońce, strumień energii promieniowania termicznego Ziemi byłby równy strumieniowi energii dopływającej do powierzchni z jej wnętrza. Gęstość tego strumienia na jednostkę pola powierzchni Ziemi obliczamy jako
$2\cdot10^{-2}$ K/m · 3 W/K · m = $6\cdot10^{-2}$ W/m².
Gęstość strumienia energii emitowanego promieniowania termicznego wynosi $E = \varepsilon\,\sigma\,T^4$, gdzie ε — emisyjność powierzchni, σ — stała Stefana-Boltzmanna, T — temperatura bezwzględna. Przyrównanie gęstości obu tych strumieni energii daje po podstawieniu odpowiednich danych wzór na poszukiwaną temperaturę powierzchni Ziemi: $T = \sqrt[4]{\dfrac{10^6}{\varepsilon}}$ K. Wartość ε nie wpływa więc istotnie na wynik: dla $\varepsilon = 1$ mamy $T = 32$ K, dla $\varepsilon = 0{,}1$ mamy $T = 56$ K. Temperatura powierzchni Ziemi zawierałaby się prawdopodobnie między tymi wartościami.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 19 /WT=2,20/ i 20 /WT=2,85/
z numeru 12/1985

Piotr Bała	- Toruń	40,86pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	27,86pkt
Dzierżysław Lipniacki-Lublin		18,82pkt
Aleksander Surma	- Myszków	16,60pkt
Mirosław Semla	- Opole	13,63pkt
Maciej Stasiak	- Człuchów	12,15pkt
Wiesław Stochmal	- Szczecin	11,88pkt
Zbigniew Lipowczan- Katowice		11,81pkt
Anna Gluza	- Toruń	11,00pkt
Mariusz Surma	- Kielce	10,18pkt

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1986

Przypominamy treść zadań:

125. Niech $Z_m^n = \{(x_1, \ldots, x_n): x_i \in \{1, \ldots, m\}, i = 1, \ldots, n\}$. Ciągi $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_n)$ nazywamy bliskimi, gdy $|x_j - y_j| = 1$ dla pewnego j, $x_i = y_i$ dla $i \neq j$. Dla jakich par $m, n \in N$ istnieje uporządkowanie zbioru Z_m^n, przy którym każde dwa sąsiednie ciągi, a także ostatni z pierwszym, są bliskie?

126. Skonstruować trójkąt mając dane: promień okręgu opisanego, długość jednego z boków i odległość ortocentrum od prostej zawierającej ten bok.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 121 /WT=2,56/ i 122 /WT=2,02/
z numeru 12/1985

Wojciech Boratyński	- Warszawa	46,41pkt
Jacek Uryga	- Bytom	45,29pkt
Andrzej Bonk	- Chełmża	43,62pkt
Marian Roman	- Ełk	43,09pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	42,93pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	41,69pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	41,68pkt

Pan Boratyński - to numer 39 w Klubie 44.
Pan Uryga - już po raz czwarty.

125. Gdy $m = 1$, warunek zadania jest spełniony (w próżni: nie ma w Z_1^n dwóch różnych ciągów). Gdy $n = 1$, żądane uporządkowanie istnieje dla $m = 2$, a nie istnieje dla $m > 2$ (bo $Z_m^1 = \{1, \ldots, m\}$). Pokażemy teraz, że dla $m > 1$, $n > 1$ uporządkowanie, o jakim mowa, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy m jest parzyste.

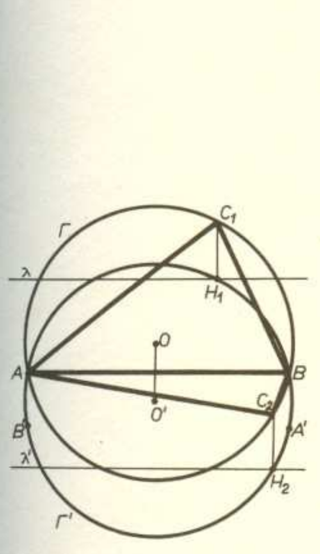
1) m nieparzyste. Zbiór Z_m^n ma m^n elementów; jest to liczba nieparzysta. Przy przejściu od ciągu (x_i) do ciągu bliskiego suma Σx_i zmienia swą parzystość, więc cykl nie może się zamknąć.

2) m parzyste. Indukcja względem n. Dla $n = 2$ istnienie omawianego uporządkowania jest równoważne możliwości obejścia szachownicy $m \times m$ drogą zamkniętą bez samoprzecięć, złożoną z przesunięć o jedno pole poziomo lub pionowo; to się da zrobić na wiele sposobów. Przypuśćmy teraz, że zbiór Z_m^n dopuszcza uporządkowanie $z_1, \ldots, z_N$ ($N = m^n$), w którym ciągi z_k i z_{k+1} są bliskie dla każdego k ($z_{N+1} \equiv z_1$). Dla dowolnego ciągu $z = (x_1, \ldots, x_n) \in Z_m^n$ i dla dowolnej liczby $y \in \{1, \ldots, m\}$ niech zapis zy oznacza ciąg $(x_1, \ldots, x_n, y) \in Z_m^{n+1}$. Wówczas dobre jest następujące uporządkowanie zbioru Z_m^{n+1}:

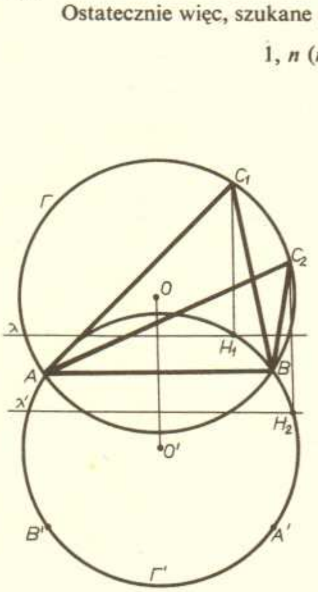
$$z_1 1, \ldots, z_1 m, z_2 m, \ldots, z_2 1, z_3 1, \ldots, z_3 m, \ldots \ldots \ldots, z_N m, \ldots, z_N 1.$$

Ostatecznie więc, szukane pary m, n to:

$$1, n \ (n \text{ dowolne}); \ 2, 1; \ m, n \ (m > 1, n > 1, m \text{ parzyste}).$$



Rys. 1



Rys. 2

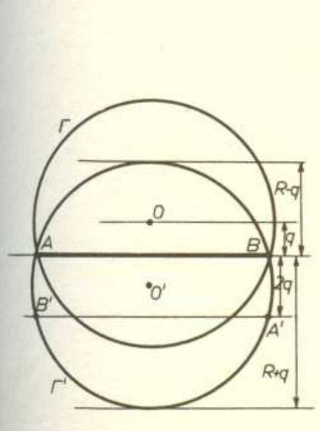
126. Przypuśćmy, że dany jest trójkąt ABC. Niech Γ będzie okręgiem opisanym na tym trójkącie, a Γ' — obrazem Γ w symetrii osiowej względem prostej AB. Oznaczmy przez O i O' środki tych okręgów, a przez H — ortocentrum trójkąta ABC. Weźmy pod uwagę wektor $w = \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{CH}$. Ponieważ $\overrightarrow{OO'} \perp \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$, więc i $w \perp \overrightarrow{AB}$. Dalej $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, skąd $w = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}$. Otrzymana suma jest niezmiennicza względem cyklicznej zamiany wierzchołków A, B, C. Skoro więc wektor w jest prostopadły do boku $\overrightarrow{AB}$, to jest prostopadły także do każdego z pozostałych dwóch boków trójkąta ABC — jest więc wektorem zerowym. Zatem $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OO'}$. Znaczy to, że punkt H otrzymuje się przesuwając wierzchołek C o wektor $\overrightarrow{OO'}$, a ponieważ przesunięcie to przenosi okrąg Γ na Γ', przeto $H \in \Gamma'$. Przyjmując, że punkty A i B są ustalone, a C może być dowolnym punktem okręgu Γ, różnym od A i B widzimy, że H może być dowolnym punktem okręgu Γ', różnym od A' i B' (punktów okręgu Γ' antypodycznych do A i B). Wynika stąd metoda konstrukcji. Dane: $AB = c$, $OA = R$, $\operatorname{dist}(H, \operatorname{pr} AB) = d$. Umieszczamy na płaszczyźnie odcinek AB długości c oraz okręgi Γ i Γ' o promieniu R przechodzące przez A i B; jest to wykonalne, gdy $0 < c \leqslant 2R$. Rozwiązanie poszukiwane jest z dokładnością do izometrii; możemy więc zakładać, że Γ jest okręgiem opisanym na konstruowanym trójkącie, a wówczas ortocentrum H należy do zbioru $\Gamma' - \{A', B'\}$. Prowadzimy proste λ i λ' równoległe do AB, w odległości d od prostej AB, prosta λ po tej stronie, co punkt O, prosta λ' po przeciwnej. Punkt H może być dowolnym (różnym od A', B') punktem przecięcia jednej z tych prostych z okręgiem Γ'. Punkt C znajdujemy przesuwając punkt H o wektor $\overrightarrow{O'O}$.

Jeśli $c < 2R$ i $d > 0$ i jeśli zarówno prosta λ, jak i λ' ma punkty wspólne z okręgiem Γ' (różne od A', B'), wówczas otrzymujemy dwa (z dokładnością do symetrii względem prostej OO') możliwe położenia punktu H, więc i dwa trójkąty ABC spełniające warunki zadania. Są one nieprzystające — jeden ostrokątny, drugi rozwartokątny (rysunki 1 i 2). Gdy natomiast $c = 2R$, to $\Gamma = \Gamma'$, a gdy $d = 0$, to $\lambda = \lambda'$ i otrzymane trójkąty (prostokątne) są przystające (symetryczne względem prostej AB bądź identyczne).

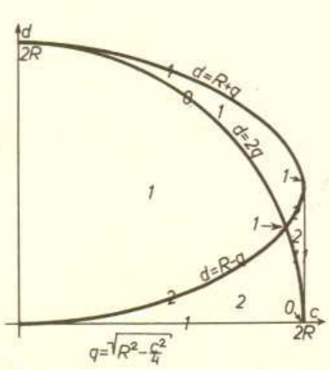
Niech $q = \operatorname{dist}(O, \operatorname{pr} AB) = \sqrt{R^2 - c^2/4}$. Mamy następujące, łatwe do sprawdzenia, warunki analityczne (rysunek 3):

$$\lambda \cap \Gamma' \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \leqslant d \leqslant R - q,$$

$$\lambda' \cap (\Gamma' - \{A', B'\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \leqslant d \leqslant R + q, \quad d \neq 2q.$$



Rys. 3



Rys. 4

Tak więc liczba rozwiązań (tj. nieprzystających trójkątów o zadanych parametrach) może wynosić 0, 1, 2. Rysunek 4 przedstawia zakres zmienności parametrów c i d przy ustalonym R; cyferki 0, 1, 2 oznaczają liczbę rozwiązań w poszczególnych sytuacjach.