# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1986

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a $N$ — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

**Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44M"**
**po uwzględnieniu ocen rozwiązań**
**zadań 119 /WT=2,79/ i 120 /WT=1,87/**
**z numeru 11/1985**

| | | |
|---|---|---|
| Dariusz Kurpiel | - Zarszyn | 45,16pkt |
| Marian Roman | - Ełk | 43,09pkt |
| Jacek Mańdziuk | - Lublin | 42,93pkt |
| Wojciech Boratyński | - Warszawa | 41,83pkt |
| Andrzej Sudoł | - Nowy Sącz | 41,68pkt |
| Jacek Uryga | - Bytom | 40,71pkt |
| Grzegorz Kuś | - Kraków | 39,93pkt |
| Andrzej Bonk | - Chełmża | 39,45pkt |

Pan Dariusz Kurpiel jest trzydziestym ósmym członkiem Klubu 44.

## Zadania z matematyki nr 131, 132

*Redaguje dr Marcin E. KUCZMA*

**131.** Przez środki dwóch skośnych krawędzi czworościanu poprowadzono płaszczyznę, rozcinając nią czworościan na dwie części. Jakie wartości może przyjmować stosunek objętości tych dwóch części?

**132.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_{ij}$ ($i = 1,\ldots,n$ ; $j = 1,\ldots, k$) zachodzi nierówność

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} a_{ij}\Big)^k \leqslant \prod_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^k .$$

Zadanie 132 przysłał pan Marcin Mazur z Białegostoku

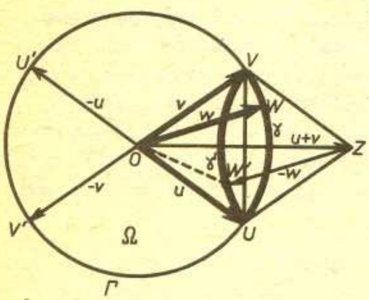
## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1986

Przypominamy treść zadań:

123. Rozwiązać równanie $(a^2x+b^2/x)\sqrt{1+(x-c)^2} = 2ab$ (dane $a, b, c > 0$).

124. Dane wektory współpłaszczyznowe $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ o długości 1. Dowieść, że któryś z wektorów $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ ma długość $\leqslant 1$.

**123.** Żadna liczba $x < 0$ równania nie spełnia. Dla $x > 0$ pierwszy czynnik iloczynu po lewej stronie równania jest $\geqslant 2ab$, a drugi jest $\geqslant 1$. Równanie może więc być spełnione jedynie wtedy, gdy obie te nierówności stają się równościami, czyli gdy $x = b/a$ i jednocześnie $x = c$. Zatem: gdy $c \neq b/a$, równanie nie ma rozwiązań; gdy $c = b/a$, równanie ma jedno rozwiązanie $x = c$.

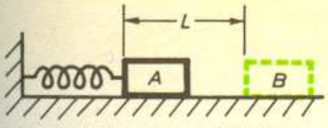



**124.** Wybierzmy dowolny punkt płaszczyzny $O$ i oznaczmy przez $\Omega$ koło domknięte o środku $O$ i promieniu 1, a przez $\Gamma$ brzeg tego koła. Niech $U, V, W, U', V'$ będą takimi punktami okręgu $\Gamma$, że $\overrightarrow{OU} = \boldsymbol{u}$, $\overrightarrow{OV} = \boldsymbol{v}$, $\overrightarrow{OW} = \boldsymbol{w}$, $\overrightarrow{OU'} = -\boldsymbol{u}$, $\overrightarrow{OV'} = -\boldsymbol{v}$. Rozpatrzymy na początku przypadek, gdy punkt $W$ należy do krótszego łuku okręgu $\Gamma$ o końcach $U$ i $V$. Oznaczmy ten łuk przez $\gamma$ (rysunek), a przez $\gamma'$ łuk symetryczny do $\gamma$ względem prostej $UV$. Oczywiście $\gamma' \subset \Omega$. Niech $W'$ będzie punktem symetrycznym do $W$ względem środka odcinka $\overline{UV}$. Założyliśmy, że $W \in \gamma$, a zatem $W' \in \gamma' \subset \Omega$, czyli $OW' \leqslant 1$. Zbudujmy romb $OUZV$. Zachodzą równości wektorowe $\overrightarrow{OZ} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\overrightarrow{ZW'} = -\boldsymbol{w}$, skąd $\overrightarrow{OW'} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, tak, że w tym przypadku $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}| \leqslant 1$.
Przechodząc do przypadku ogólnego zauważmy, że punkt $W$ musi leżeć na jednym z czterech łuków, na które punkty $U, V, U', V'$ dzielą okrąg $\Gamma$. Możemy więc powtórzyć przeprowadzone rozumowanie zastępując wektory $\overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{OV}$ przez pewne dwa kolejne wektory z czwórki $\overrightarrow{OU}$, $\overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{OU'}$, $\overrightarrow{OV'}$. W każdym przypadku są to wektory $\pm\boldsymbol{u}$, $\pm\boldsymbol{v}$. Stąd wniosek, że $|\varepsilon\boldsymbol{u}+\eta\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}| \leqslant 1$ dla pewnego układu znaków $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$, a to jest równoważne tezie dowodzonego twierdzenia.

## Klub 44 w konfrontacji z uczestnikami XXVII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej

Podczas drugiego spotkania członków **Klubu 44**, które odbyło się w październiku zeszłego roku, organizatorzy ligi zadaniowej zaproponowali członkom **Klubu 44** oryginalną próbę sił: sześcioosobowa reprezentacja **Klubu 44** otrzyma do rozwiązania te same zadania, z którymi zmagać się będą uczestnicy XXVII MOM. Odbędzie się to w Warszawie w tych samych dniach, co zawody XXVII MOM, tj. 9 i 10 lipca tego roku. Warunki będą takie same, jak dla olimpijczyków: odizolowana sala, cztery i pół godziny czasu, trzy zadania (każdego z dwóch dni zawodów). Pisanie rozpocznie się w oba dni o tej godzinie, o której zakończą się zawody MOM, a więc, gdy treść zadań będzie już jawna.

Rozwiązania naszych reprezentantów będą następnie ocenione według tych samych kryteriów, co i rozwiązania olimpijczyków. Nasza reprezentacja zostanie wyselekcjonowana spośród trzynastu osób, które w październiku 1985 r. były członkami **Klubu 44** i wyraziły chęć udziału w imprezie. Podstawą selekcji będą wyniki uzyskane przez te osoby w rozwiązywaniu zadań ligowych z numerów 8/1985 — 3/1986.
Ciekawi jesteśmy, jak wypadnie reprezentacja **Klubu 44** w konfrontacji z ekipami różnych państw biorącymi udział w MOM. O rezultatach tej konfrontacji powiadomimy naszych Czytelników.




A - położenie „startowe" klocka
B - położenie klocka przy luźnej sprężynie

## Zadania z fizyki nr 29, 30

*Redaguje dr Andrzej NADOLNY*

**29.** Klocek o masie $m$, spoczywający na płaskim, poziomym podłożu, jest połączony sprężyną o stałej sprężystości $k$ ze stałym punktem (jak na rysunku). Sprężynę ściśnięto o odcinek $L$ w stosunku do położenia swobodnego, a następnie puszczono. O jaki odcinek przesunie się klocek po podłożu do swego pierwszego zatrzymania, jeżeli współczynnik tarcia klocka o podłoże wynosi $f$? Masę sprężyny należy zaniedbać.

**30.** Jaki co najmniej powinien być wypadkowy ładunek elektryczny Ziemi wraz z atmosferą, aby (przy założeniu kulisto-symetrycznego rozkładu tego ładunku) występowało elektrostatyczne „wymiatanie" z ziemskiego pola grawitacyjnego (z górnych warstw atmosfery) jednokrotnie dodatnio zjonizowanych atomów wszystkich pierwiastków? Jaką objętość powietrza (w warunkach normalnych) należałoby całkowicie zjonizować, aby łączny ładunek uzyskanych w ten sposób jonów $N^+$ i $O^+$ odpowiadał powyższemu ładunkowi? Niezbędne do obliczeń dane należy wziąć z tablic.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 17 /WT=1,65/ i 18 /WT=1,95/ z numeru 11/1985

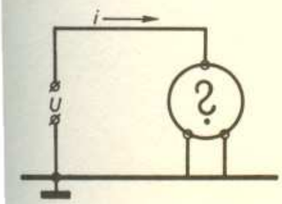
| | | |
|---|---|---|
| Piotr Bała | - Toruń | 37,04pkt |
| Tomasz Rawlik | - Gliwice | 26,72pkt |

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1986

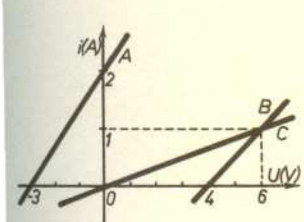
Przypominamy treść zadań:

**21.** Dana jest elektryczna „czarna skrzynka", zawierająca nieznany obwód, z trzema zaciskami $A$, $B$, $C$. Posługując się układem pokazanym na rysunku 1 wyznaczono zależność natężenia prądu $i$ od przyłożonego z zewnątrz napięcia $U$ dla trzech kombinacji zacisków. Zależności te (charakterystyki prądowo-napięciowe) są przedstawione na rysunku 2. Dodatni kierunek prądu określa strzałka na rysunku 1, a symbol przy każdej z charakterystyk odpowiada symbolowi zacisku, który w danym przypadku połączony był ze źródłem napięcia (dwa pozostałe połączone z masą). Podać najprostszy możliwy układ elektryczny „czarnej skrzynki" i określić parametry jego elementów.

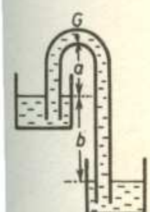
**22.** Rysunek 3 przedstawia schematycznie lewar używany do przelewania cieczy między naczyniami o różnych poziomach. Jakie czynniki, poza ciśnieniem atmosferycznym, warunkują maksymalną wysokość $a$ wzniesienia cieczy w lewarze nad poziom górnego naczynia? Wyznaczyć maksymalną wysokość $a$ dla dwóch skrajnych przypadków: (1) gdy $b \ll a$ oraz (2) gdy $b \gg a$. Należy przy tym przyjąć, że rurka lewara ma na całej długości jednakową średnicę, że długość wygiętego łukowo odcinka lewara jest mała w porównaniu z $a$ oraz że ciecz jest czysta (jednoskładnikowa i nie zawiera rozpuszczonych gazów).




Rys. 1




Rys. 2




Rys. 3

**21.** Na podstawie zależności $i(R)$ (rys. 2) znajdujemy schematy zastępcze „czarnej skzynki" dla różnych kombinacji zacisków (rys. 4). Schematy te dają się zrealizować przez układ przedstawiony na rysunku 5. Poszukiwane parametry tego układu spełniają następujące związki (wprowadzamy tu oznaczenia przewodności $G_k = 1/R_k$ i korzystamy z wzorów wyprowadzonych w rozwiązaniu zadania 5, zamieszczonym w numerze 7/1985):

$$G_A = G_2+G_3, \quad G_B = G_3+G_1, \quad G_C = G_1+G_2,$$

$$\mathscr{E}_A = \frac{G_2\mathscr{E}_2+G_3\mathscr{E}_3}{G_2+G_3}, \quad \mathscr{E}_B = \frac{G_3\mathscr{E}_3-G_1\mathscr{E}_1}{G_3+G_1}, \quad 0 = \frac{G_1\mathscr{E}_1+G_2\mathscr{E}_2}{G_1+G_2}.$$

Z rozwiązania tego układu równań otrzymujemy:

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = 6\,\Omega, \quad R_3 = 2\,\Omega, \quad \mathscr{E}_1 = 0, \quad \mathscr{E}_2 = 0, \quad \mathscr{E}_3 = 4\text{V}.$$

Rozszyfrowane wnętrze „czarnej skrzynki" przedstawia rysunek 6. Identyczny wynik można otrzymać przyjmując układ w postaci „gwiazdy" (rys. 7).

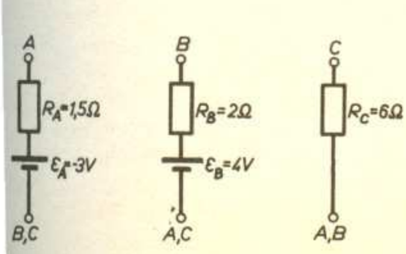
**22.** Przelewanie cieczy lewarem będzie niemożliwe, gdy w górnej jego części powstanie pęcherz pary nasyconej cieczy, stąd uzależnienie procesu od ciśnienia pary nasyconej $p_n$ tej cieczy. W sytuacji przepływu cieczy ze stałą prędkością (stan ustalony) można przyjąć, że wzdłuż rury lewara zachodzi liniowy spadek ciśnienia. Wobec tego ciśnienie w punkcie $G$ (przy zaniedbaniu wymiarów łuku lewara) jest równe

$$p_G = p_0-\varrho g a-\frac{a}{2a+b}\varrho g b = p_0-\varrho g\frac{2a(a+b)}{2a+b},$$

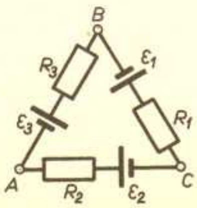
gdzie $p_0$ — ciśnienie atmosferyczne, $\varrho$ — gęstość cieczy, g — przyspieszenie ziemskie.
Aby nie tworzyły się pęcherze pary nasyconej, powinno zachodzić $p_n < p_G$. Stąd wyznaczamy maksymalną wysokość $a$:

$$\text{dla przypadku } b \ll a \qquad a_{max} = \frac{p_0-p_n}{\varrho g},$$

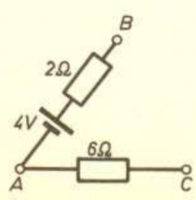
$$\text{dla przypadku } b \gg a \qquad a_{max} = \frac{p_0-p_n}{2\varrho g}.$$



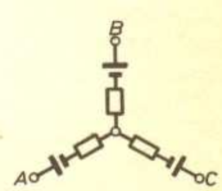

Rys. 4




Rys. 5




Rys. 6




Rys. 7