Metoda niezmienników

Grzegorz ŚWIĄTEK

Czy zdarzyło się Wam kiedyś myśleć nad rozwiązaniem jednego tylko zadania przez, powiedzmy, pół roku? Myślę, że wielu z Was już się kiedyś z takim problemem spotkało. Dla autora niniejszego artykułu takim „nierozwiązalnym" zadaniem był przykład, zamieszczony dalej do samodzielnego rozwiązania z numerem 2. Sądzę jednak, że zadanie poniższe jest jeszcze ciekawsze. Oto ono:

Na nieskończonej szachownicy jest wydzielony prostokąt, którego jeden bok ma długość podzielną przez 3. Prostokąt ten wypełniony jest pionkami. Ruchem dozwolonym jest bicie podobne jak w warcabach, tyle że bić można tylko w czterech kierunkach „na wprost", a nie po przekątnej. Pionek może zatem przeskoczyć swego bezpośredniego sąsiada z dołu, góry, prawa lub lewa, o ile tylko następne pole w tym kierunku jest wolne. Pionka przeskoczonego zdejmujemy wówczas z szachownicy. Dowieść, że nie można poprowadzić gry w ten sposób, aby pozostał tylko jeden pionek.

Proponuję chwilę zastanowić się nad tym zadaniem, aby dostrzec, że jest ono naprawdę warte półrocznego rozmyślania.

Był to przykład gry w samotnika, która nie może zakończyć się sukcesem. Dla odmiany prezentuję grę, w której musimy wygrać.

Na stole leży 13 kart czerwonych i tyleż samo czarnych. W każdym kroku losujemy dwie karty, po czym zamiast kart wylosowanych zwracamy na stół inne, według następujących reguł:

zamiast dwóch czarnych kładziemy czarną i dwie czerwone,

zamiast czarnej i czerwonej — jedną czerwoną,

w przypadku dwóch czerwonych nie zwraca się nic.

Gra toczy się do momentu, gdy na stole pozostaną mniej niż dwie karty lub gdy liczba kroków przekroczy 40. Wygrywamy, o ile w chwili zakończenia gry na stole leży jedna czerwona karta.

Dowieść, że nasza wygrana jest pewna.

To zadanie naprawdę nie jest trudne i warto je samodzielnie rozwiązać.

A oto rozwiązanie przykładowe:

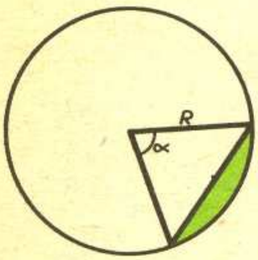
Oznaczmy przez c_i i r_i liczbę kart odpowiednio czarnych i czerwonych leżących na stole po i-tym kroku. Mamy $r_0 = c_0 = 13$. W myśl reguł gry zachodzą następujące związki:

1° $r_{i+1} \equiv r_i (\mathrm{mod}\ 2)$,
2° $2c_{i+1}+r_{i+1} < 2c_i+r_i$.

Początkowo mamy $2c_0+r_0 = 39$. Z warunku 2° wynika zatem, że $2c_{38}+r_{38} \leqslant 1$. Tak więc po 38 ruchach gra musi się zakończyć. Z warunku 1° wynika z kolei, że na stole będzie nieparzysta liczba kart czerwonych, zatem... koniec dowodu.

Ciekaw jestem, czy wybraliście podobną metodę rozwiązania? Zadanie jest co prawda łatwe, ale prostota rozwiązania, które przedstawiłem, jest chyba zaskakująca. Zwróćmy uwagę na istotne elementy tej metody. Pojawiły się dwie wielkości arytmetyczne, z których jedna pozostawała stała przez cały czas gry, druga natomiast zmieniała się w sposób monotoniczny — ściśle malejący. Ta pierwsza to właśnie ów niezmiennik, o którym mowa w tytule artykułu. Drugą możemy nazwać półniezmiennikiem, gdyż zmienia się tylko w jedną stronę. W fizyce takim niezmiennikiem jest energia, a półniezmiennikiem entropia, zwana też sugestywnie „strzałą czasu". Czytelnicy, którzy interesują się fizyką, zauważyli zapewne, że również wiele zadań z tej dziedziny daje się zadziwiająco prosto rozwiązać, gdy się skorzysta z prawa zachowania energii lub z innych praw zachowania.

Rozwiązanie zadania M 433. Przypuśćmy, że pewne trzy cięciwy dzielą koło na siedem części o równych polach. Każda z nich dzieli wtedy pole koła w stosunku 3 : 4 (przy podziale 2 : 5 lub 1 : 6 pozostałe cięciwy nie podzielą większej części ani na pięć, ani na sześć kawałków).



Rys. 1

Rys. 2

Oznaczmy przez R promień koła, a przez α kąt środkowy, oparty na cięciwie. Pole odcinka kołowego (część zakreskowana na rysunku 1) wynosi $\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha = \frac{3}{7}\pi R^2$, stąd $\alpha - \sin\alpha = \frac{6}{7}\pi$. Z drugiej strony, $3\frac{\alpha}{2\pi}\pi R^2 \geqslant \pi R^2 + \frac{3}{7}\pi R^2$, ponieważ trzy wycinki kołowe, odpowiadające cięciwom, dają w sumie całe koło, przy czym każda z zakreskowanych na rysunku 2 figur o polu $\frac{1}{7}\pi R^2$ jest zawarta w dwóch takich wycinkach. Zatem $\alpha \leqslant \frac{20}{21}\pi$; ponadto $\alpha < \pi$. Ponieważ funkcja sinus maleje w przedziale $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ oraz $\sin x \leqslant x$ dla $x \geqslant 0$, mamy

$$\frac{6}{7}\pi = \alpha - \sin\alpha \geqslant \frac{20}{21}\pi - \sin\frac{20}{21}\pi =$$
$$= \frac{20}{21}\pi - \sin\frac{1}{21}\pi \geqslant \frac{20}{21}\pi - \frac{1}{21}\pi = \frac{19}{21}\pi.$$

Ale $\frac{6}{7} < \frac{19}{21}$, stąd sprzeczność.

Rozwiązanie zadania M 435. Przypuśćmy, dla ustalenia uwagi, że $x \leqslant y$. Wtedy $x^n = z^n - y^n = (z-y)(z^{n-1}+z^{n-2}y+\ldots+zy^{n-2}+y^{n-1})$. Stąd $x^n \geqslant nx^{n-1}$, czyli $x \geqslant n$ c.n.d.

Oto kolejny przykład:

Oznaczmy przez P wnętrze kąta prostego, a przez $\mathcal{F}$ rodzinę wszystkich funkcji $f: P \to N$ przyjmujących wartości różne od 0 tylko w skończenie wielu punktach. Krokiem nazwijmy przejście od funkcji $f \in \mathcal{F}$ do innej funkcji $h \in \mathcal{F}$ w sposób następujący. Wybieramy $n \geqslant 3$ i punkty $A_0, A_1, \ldots, A_n \in P$ tak, by $f(A_0) \geqslant n$ oraz punkty $A_1, \ldots, A_n$ były wierzchołkami n-kąta foremnego o środku A_0, przy czym $A_0A_1 \geqslant 1$. Nową funkcję h tworzymy następująco

$$h(A_0) = f(A_0) - n,$$
$$h(A_i) = f(A_i) + 1 \text{ dla } i = 1, \ldots, n,$$
$$h(X) = f(X) \text{ dla } X \in P \setminus \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}.$$

Należy udowodnić, że zaczynając od dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}$ możemy w powyższy sposób wykonać tylko skończoną liczbę kroków.

Środkiem ciężkości układu punktów materialnych o masach 1 znajdujących się w punktach $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy taki punkt O, że $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OX_i} = \vec{O}$. Wówczas momentem bezwładności tego układu punktów względem środka ciężkości jest suma kwadratów odległości tych punktów od punktu O.

Inwersją względem sfery o środku O i promieniu r nazywamy przekształcenie, które punktowi X, różnemu od O, przyporządkowuje punkt $f(X)$ należący do półprostej OX i taki, że $|Of(X)| \cdot |OX| = r^2$. Analogicznie definiujemy inwersję względem okręgu na płaszczyźnie. Przekształcenia te mają wiele interesujących niezmienników — na przykład rozwartość kątów między krzywymi.

Wskazówka: Narzucającym się niezmiennikiem jest suma wartości funkcji f w punktach, w których f jest różna od zera. Jednak ten oczywisty niezmiennik nie przybliży nas do rozwiązania. Należy dobrać wielkości geometryczne. Przypuśćmy, że wartość funkcji w punkcie y oznacza liczbę punktów materialnych o masie 1 umieszczonych w y. Wówczas przy przejściu do funkcji z niej powstającej niezmiennikiem jest środek ciężkości, a moment bezwładności względem środka ciężkości jest półniezmiennikiem zwiększającym się co najmniej o 1. Dokończenie rozwiązania pozostawiam Czytelnikom.

O ile niezmiennik w pierwszym przykładzie miał charakter arytmetyczny i rozwiązywał problem kombinatoryczny, o tyle w drugim przykładzie zarówno niezmiennik, jak i półniezmiennik miały charakter geometryczny i służyły do rozwiązania problemu geometryczno-kombinatorycznego.

Z kolei przykład typowo już geometryczny:

W przestrzeni dana jest sfera S i punkt P wewnątrz niej. Jeśli $X \in S$, to $f(X)$ określamy jako taki punkt na sferze S, że $P \in \overline{f(X)X}$. Dowieść, że f przekształca dowolny okrąg zawarty w S na okrąg.

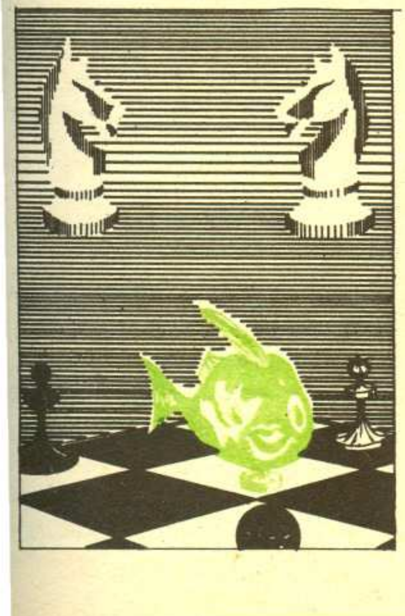
Wskazówka: Niezmiennikiem jest $|PX| \cdot |Pf(X)|$ (potęga punktu względem sfery). Łatwo sprawdzić, że wielkość ta nie zależy od położenia punktu X na sferze. Oznaczmy przez I symetrię o środku w punkcie P. Wtedy $I \circ f$ jest obcięciem pewnej inwersji do sfery S. Jak wiadomo, inwersja przekształca sfery i płaszczyzny na sfery lub płaszczyzny. Chciałbym zwrócić tu uwagę Czytelników na to, że własność polegająca na przekształcaniu pewnych figur na figury podobne może pełnić w rozumowaniu rolę analogiczną, jak posiadanie niezmiennika.

Dokończenie rozwiązania jest już bardzo proste, pozostawiam je Czytelnikom.

Czy pamiętacie zadanie o grze w samotnika? Spróbujcie może rozwiązać je teraz, poszukując odpowiedniego niezmiennika.

A	C	B	A	C
B	A	C	B	A
C	B	A	C	B
A	C	B	A	C
B	A	C	B	A
C	B	A	C	B
A	C	B	A	C
B	A	C	B	A

A oto rozwiązanie. W pola szachownicy wpiszmy litery A, B, i C tak, jak to pokazano na rysunku. Zauważmy, że po dowolnym ruchu zgodnym z regułami gry liczba pionków stojących na polach oznaczonych jedną z liter zwiększy się o jeden, a liczby pionków stojących na polach oznaczonych każdą z pozostałych liter zmniejszą się o jeden. Jeśli więc liczby te były jednakowej parzystości (tzn. wszystkie trzy parzyste lub wszystkie trzy nieparzyste), to po ruchu nadal będą mieć tę własność. To jest właśnie nasz niezmiennik. Początkowo liczby te były równe, gdyż jeden z boków prostokąta wypełnionego pionkami był podzielny przez 3, miały więc jednakową parzystość. Niemożliwe jest więc osiągnięcie trójki liczb 1, 0, 0 mających różne parzystości.



Tyle wykładu. Serdecznie zachęcam do sprawdzenia zalet metody niezmienników już w samodzielnej pracy nad podanymi przykładami.

1) Szachownica to kwadratowa plansza złożona z $n \times n$ pól. Obiegiem zamkniętym szachownicy nazwiemy ciąg ruchów pewnej figury taki, że w ostatnim ruchu figura powraca na pole wyjściowe, po drodze odwiedziwszy każde inne pole dokładnie raz. Dowieść, że jeśli istnieje zamknięty obieg pewnej szachownicy skoczkiem, istnieje też obieg zamknięty tej szachownicy leniwą wieżą (leniwa wieża porusza się tak, jak zwyczajna wieża szachowa, to znaczy po liniach poziomych i kolumnach pionowych, ale zawsze tylko o jedno pole).

2) Na okręgu znajduje się $3n$ miejsc, na których stoją jedynki lub zera. W każdym kroku zmieniamy pewną jedynkę na zero i zmieniamy cyfry na dwóch miejscach sąsiednich. Dowieść, że nie uda się w ten sposób przejść od konfiguracji z jedną jedynką do ustawienia z samymi zerami.

3) W przestrzeni dany jest taki skończony zbiór X, że dla każdej pary punktów $x, y \in X$ istnieje izometria zbioru X przekształcająca x na y. Dowieść, że zbiór X jest zawarty w pewnej sferze.