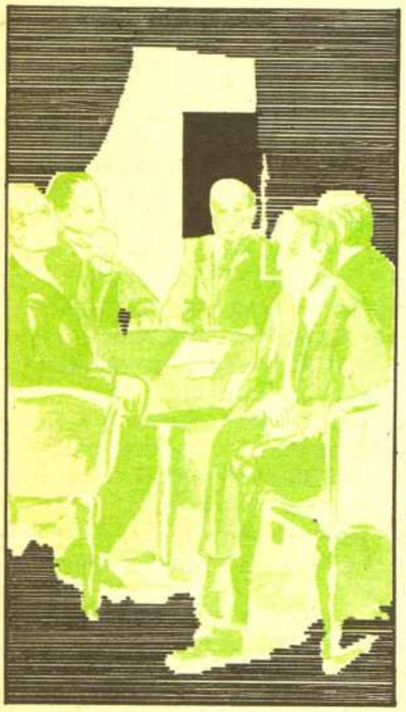
Byłem koordynatorem

Dr Marcin E. KUCZMA



Zawodowy matematyk, jeśli chce, by jego prace były czytane, pisze je w jednym z kilku języków, które zyskały rangę międzynarodowych. Jaka taka ich znajomość należy do elementarza wykształcenia każdego, kto chce pracować naukowo. Trudno wszelako byłoby wymagać od tak młodych adeptów matematyki, jakimi są uczestnicy olimpiad, żeby i oni operowali biegle obcym językiem. Piszą więc swoje rozwiązania w swoich językach ojczystych. Trzeba potem przecież te rozwiązania jednolicie i sprawiedliwie ocenić. Wśród jurorów nie ma nikogo, kto byłby w stanie czytać i tekst polski, i fiński, i mongolski.

Spróbujmy spojrzeć ,,od kuchni" na pracę Jury Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej. Kto wchodzi w skład jury? Oczywiście matematycy, reprezentujący państwa uczestniczące w olimpiadzie — po prostu opiekunowie poszczególnych ekip. Każdy z nich czyta więc prace swoich podopiecznych. Jak to zrobić, żeby było sprawiedliwie? Trzeba tu jasno powiedzieć, że nikt nie kwestionuje uczciwości ocen, nie w tym rzecz. Rozwiązanie bezbłędne otrzymuje ocenę maksymalną, rozwiązanie całkiem błędne otrzymuje ocenę zero. Kłopoty zaczynają się przy rozwiązaniach częściowo poprawnych: luki w dowodach, przeoczenia przypadków, błędy rachunkowe, brak precyzji, zrobienie tylko części zadania.
Rozwiązanie z analogiczną usterką może być przecież całkiem różnie ocenione przez różnych czytających.

W ciągu pierwszego dnia po zawodach jurorzy mają obowiązek zapoznać się z pracami swoich podopiecznych (większości ekip towarzyszy dwóch opiekunów, ale formalnie tylko jeden z nich wchodzi w skład jury, drugi jest zastępcą; prace uczniów czytają i oceniają jednak obaj). Tu zaczyna się rola koordynatorów. Są to matematycy z kraju organizującego olimpiadę, wchodzą w skład zespołu obsługi imprezy. Ich zadaniem jest, jak nietrudno zgadnąć, koordynacja. Każdy koordynator ma przydzielone jedno z zadań konkursowych i w toku pracy staje się ,,specjalistą" od tego zadania. Musi porozmawiać z wszystkimi jurorami, gdy tylko zakończą oni pierwsze czytanie prac uczniowskich. Z tej rozmowy dowiaduje się, jakie są typowe metody rozwiązania danego zadania, jakie są typowe (a także nietypowe) błędy i usterki, i wreszcie, jak każdy z jurorów proponuje oceniać rozwiązania obarczone tymi usterkami.

Na plenarnym posiedzeniu jury każdy koordynator opowiada o ,,swoim" zadaniu, o efektach przeprowadzonych wywiadów, przedstawia propozycje ocen za nie w pełni poprawne rozwiązania i wywołuje tym lawinę wypowiedzi. Ktoś spośród członków jury, o liberalnym spojrzeniu na świat, uważa, że omawiane przeoczenie nie powinno ważyć zbyt wiele; inny, patrzący ostrzej, ripostuje, że termin ,,przeoczenie" jest tu eufemizmem, że takie rozwiązanie jest bezwartościowe. Dać jeden punkt czy sześć punktów? Demokracja: dyskusje, wnioski, głosowanie. Przeważa opinia, że należą się cztery punkty. Jest bezwzględna większość głosów? To całe szczęście...

Co dalej? Zamiast ogólnikowo, może lepiej opowiedzieć przykładem. XIV MOM odbyła się w Polsce, w 1972 roku. Byłem koordynatorem zadania nr 5. Oto jego treść: Funkcje f, $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniają równanie $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)g(y)$ dla $x, y \in \mathbf{R}$; $f \not\equiv 0$, $|f(x)| \leqslant 1$ dla $x \in \mathbf{R}$; dowieść, że $|g(y)| \leqslant 1$ dla $y \in \mathbf{R}$. Zadanie, jak za chwilę zobaczymy, jest bardzo łatwe. A jednak... A jednak na 107 uczestników aż 49 otrzymało ocenę zero. Jak to wyjaśnił szef jednej z ekip, członek jury: ,,U nas w szkołach rozpatruje się tylko konkretne funkcje: ax^2+bx+c, $\log x$, $\sin x$ itp. Ale funkcje tak w ogóle? To abstrakcja. Każdy uczeń zna definicję funkcji, ale gdy trzeba coś udowodnić, nie mając w ręce konkretnej funkcji, danej jawnym wzorem, staje bezradny".

Z podanego równania widać od razu, że spełniają je na przykład funkcje $f(x) = \sin x$, $g(y) = \cos y$. I wszystko się zgadza: i założenie ($|\sin x| \leqslant 1$), i teza ($|\cos y| \leqslant 1$). To zauważyli chyba wszyscy uczestnicy, ale u wielu na tym się skończyło. Niektórzy zauważali, że istnieją i inne dobre pary funkcji — na przykład $f(x) = \cos x$, $g(y) = \cos y$, czy choćby po prostu $f \equiv 1$, $g \equiv 1$. Wykonując proste podstawienia można uzyskać pewne informacje o funkcji g; na przykład podstawienie $y = 0$ prowadzi do wniosku, że $g(0) = 1$, a podstawienia $y = x$ i $y = -x$ pozwalają przekonać się, że funkcja g musi być parzysta. Wszystkie te obserwacje, razem wzięte, niewiele przybliżają do rozwiązania zadania. Jednakże, choć może trudno w to uwierzyć, uczniowie, którzy odnotowali w swej pracy te właśnie spostrzeżenia (i nic ponadto), zostali nagrodzeni jednym punktem (skala ocen za to zadanie przewidywała maksimum siedem punktów).

Jak do tego mogło dojść? Ano, w ekipach kilku państw nikt z uczestników nie osiągnął nic więcej ponad te prościutkie stwierdzenia. Trudno się dziwić, że szefowie tych ekip postawili wniosek, by uznać to za przyczynek do rozwiązania zasługujący na dodatnią punktację (,,u nas w szkołach itd."). Wniosek, choć z oporami — przeszedł!

Przy okazji, jest to wskazówka taktyczna dla uczestników olimpiad międzynarodowych: pisać w pracy wszystkie uwagi i spostrzeżenia na temat danego zadania, nawet całkiem trywialne i we własnej opinii bezwartościowe. Zawsze się tak może zdarzyć, że przez kurtuazję dla słabszych ekip jury przyzna za to jeden lub dwa punkciki. A końcowa klasyfikacja powstaje przez zsumowanie ocen za wszystkie zadania...

Rozwiązanie zadania F 198. Gęstość można określić jako stosunek masy atomów przypadających na komórkę do objętości tej komórki. Łatwo przekonać się, że na rozważaną komórkę przypadają 4 atomy chloru i 4 atomy sodu. Zatem gęstość soli kuchennej wynosi

$$\varrho = \frac{4m_H(A_{Cl}+A_{Na})}{a^3},$$

gdzie m_H oznacza masę atomu wodoru, a A_{Cl} i A_{Na} — masy atomowe chloru i sodu. Stąd

$$m_H = \frac{\varrho a^3}{4(A_{Cl}+A_{Na})} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}.$$

Ożywioną dyskusję wzbudził sposób rozwiązania, który pojawił się w kilku pracach, a polegał na sprowadzeniu do równania różniczkowego. Dwukrotne zróżniczkowanie lewej strony danego równania względem zmiennej x, a także względem zmiennej y, daje ten sam wynik. Podobnie musi więc być i z prawą stroną; zatem $f''(x)g(y) = f(x)g''(y)$ i wobec dowolności x i y iloraz f''/f musi być wielkością stałą (zresztą g''/g też). Z teorii równań różniczkowych liniowych wynika teraz, że f, jako funkcja ograniczona, musi być postaci $A \cos ax + B \sin ax$, co po podstawieniu do danego równania daje $g(y) = \cos ay$, a więc faktycznie $|g(y)| \leqslant 1$. No, dobrze; ale kto pozwolił różniczkować? W założeniach zadania nie ma ani słowa o różniczkowalności f i g!

Głosy w dyskusji:

— Co z tego? Branie pod uwagę funkcji nieróżniczkowalnych (czy wręcz nieciągłych) to kwestia pewnej kultury matematycznej, której nie można żądać od uczniów.
— Nie przesadzajmy. Zadanie ma założenie i tezę i należy przeprowadzić dowód. Różniczkowalność jako mało znaczący warunek dodatkowy? Tak się akurat składa, że wśród par funkcji f, g spełniających dane równanie funkcje nawet tylko ciągłe są „w ogromnej mniejszości", można powiedzieć, wyjątkowe.
— Ale zauważmy, że w omawianych pracach zostało zrobione (wprawdzie pod dodatkowym założeniem) znacznie więcej, niż zadanie wymaga: zostały znalezione wzory na funkcje f i g.
— Może i więcej, ale nie na temat!

W końcu ustalono, że rozwiązanie takie kwalifikuje się na trzy punkty...

[Tu dygresja: rozważane równanie funkcyjne to tzw. równanie Wilsona. W klasie funkcji ciągłych i ograniczonych ma tylko rozwiązanie trygonometryczne podane powyżej. Gdy się odrzuci ograniczoność, dochodzą rozwiązania hiperboliczne (cosh i sinh zamiast cos i sin) oraz pary: $g \equiv 1$, f liniowa. Ale jest jeszcze mnóstwo (2^c) rozwiązań nieciągłych.]

Podobnie było i z innymi zadaniami. Dalsze dwa dni to dopracowywanie ocen. Jurorzy czytają prace „swoich" zawodników, teraz już bardzo starannie, koordynatorzy składają im wizyty. Po uzgodnieniu ocen, według ustaleń z posiedzenia jury, podpisuje się wspólny protokół i gotowe. Tylko że znów nie wszystko jest proste. Z rozwiązaniami bezbłędnymi oraz bezwartościowymi, a także z tymi, które podpadają pod schematy omówione na plenum jury, sprawa jest jasna. Ale jest masa przypadków indywidualnych. Na przykład, rozwiązanie w zasadzie poprawne, tylko że — coś przykuwa uwagę koordynatora. Przejście od którejś formułki do następnej wymaga uzasadnienia, a w pracy, którą mam przed oczami, formułki te oddziela trochę za krótka linijka tekstu. Proszę rozmówcę, by przetłumaczył ten tekst słowo po słowie — no, nie ma tego uzasadnienia, prawda? No, nie ma... Więc luka. Jaką ocenę Pan proponuje? Max minus jeden — więc sześć? Zgoda... Czasem jednak trafia się kontrowersja bardziej zasadnicza. Przypadki, gdy nie udaje się koordynatorowi osiągnąć porozumienia z jurorem, stają się przedmiotem dyskusji na kolejnym plenarnym posiedzeniu jury.

Utkwił mi w pamięci jeden taki przypadek. Uczeń wybrał metodę bardzo okrężną i zawiłą, a gdy był już prawie „w domu" i pozostawało tylko uczynić jakieś jedno drobne spostrzeżenie — on tego spostrzeżenia nie uczynił i zamiast tego powołał się na mocne i nieoczywiste twierdzenie; treści tego twierdzenia nie pamiętam dokładnie i zresztą nie ma to tu znaczenia. Na plenum jury staje kwestia: jak to ocenić? Okazuje się, że nikt z jurorów (zawodowych matematyków, bądź co bądź) nie jest pewien, czy to twierdzenie jest w ogóle prawdziwe, nikt nie jest w stanie od ręki je udowodnić lub obalić. Ale czy to ma mieć wpływ na ocenę? Przecież uczeń nie może mieć pojęcia o teorii, o którą zahaczył. Więc albo bluffował, albo wydało mu się oczywiste coś, co bynajmniej oczywiste nie jest. Ale jednak — jeśli to twierdzenie jest prawdziwe, to nie można wykluczyć, że naszemu uczniowi zdarzyło się coś takiego kiedyś spotkać w literaturze i jego szczęście, że akurat na olimpiadzie trafiła się okazja do popisania się zdobytą, choćby wyrywkowo, wiedzą. No, a wtedy — ocena max? Sprawę wyjaśnił dopiero telefon do eksperta, profesora mieszkającego w innym mieście, specjalisty od tych zagadnień (dobrze, że nie był na urlopie). Twierdzenie okazało się błędne!

Na tymże posiedzeniu jury padają też wnioski o wyróżnienie rozwiązań szczególnie zgrabnych lub pomysłowych. W naszym zadaniu wyróżnienia doczekało się rozwiązanie takie: Przypuśćmy, wbrew tezie, że $|g(y_0)| = a > 1$ dla pewnego y_0. Niech $M = \sup|f|$; istnieje x_0 takie, że $|f(x_0)| > M/a$. Oznaczmy $u = f(x_0+y_0)$, $v = f(x_0-y_0)$. Wtedy $|u+v| = 2|f(x_0)g(y_0)| > 2a\cdot M/a = 2M$, skąd $|u| > M$ lub $|v| > M$, co jest niemożliwe, bo $M = \sup|f|$. Prawda, że proste? Standard, rutyna. Nie do wiary, ale rozwiązanie to podał tylko 1 (słownie jeden) uczestnik, Paweł Traczyk z Polski. Inne bezbłędne rozwiązania opierały się na podobnym pomyśle, jednak mniej zgrabnie opracowanym, z indukcyjną konstrukcją ciągu punktów.

Praca jury dobiega końca. Ostatnie posiedzenie: ustalenie barier punktowych, przyznanie nagród I, II, III stopnia oraz wyróżnień. Komunikat końcowy i ustalenie miejsca następnej MOM. Do zobaczenia za rok!

Rozwiązanie zadania M 436. Rozpatrzmy ścianę o największej liczbie boków n. Ma ona n sąsiadów o liczbach boków zawartych między 3 i n. W takim razie (zasada szufladkowa Dirichleta) pewne dwie ściany muszą mieć tę samą liczbę boków.

Rozwiązanie zadania M 437. Ponieważ suma dowolnych pięciu liczb napisanych na kartkach nie przekracza $2^2 + \ldots + 2^6 = 124$, losowań musi być co najmniej sześć. Każde ze zdarzeń, polegających na tym, że kartka z liczbą 2^{n-1}, $n = 1, 2, \ldots, 7$ nie została wylosowana, ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{7}$. Jeśli $n = 3, 4, 5, 6$ lub 7, to suma liczb na wylosowanych kartkach jest mniejsza od 124, a po siódmym losowaniu wynosi 127. Zatem prawdopodobieństwo otrzymania liczby 127 wynosi $\frac{5}{7}$ i jest większe niż prawdopodobieństwo otrzymania 125 i 126.

Rozwiązanie zadania F 197. Połączmy ciała w pierścień pokazany na rysunku. Gdyby napięcie U_{AB} było różne od $U_{AC}+U_{CB}$, w pierścieniu płynąłby prąd. Załóżmy, że rozważane przewodniki (co najmniej jeden z nich) nie są nadprzewodnikami. Przepływowi prądu towarzyszą wtedy różnego rodzaju zjawiska cieplne, np. zjawisko Joule'a-Lenza, chłodzenie co najmniej jednego złącza, ogrzewanie co najmniej jednego złącza itp. Ze względu na zachowanie energii pierścień nie może być w każdym swym punkcie cieplejszy od otoczenia. Jeżeli gdzieś jest cieplejszy (a z pewnością takie miejsca są ze względu na zjawisko Joule'a-Lenza), to muszą też być gdzieś obszary o temperaturze mniejszej niż temperatura otoczenia. W takim razie umieszczając chłodnicę silnika cieplnego w chłodniejszym miejscu pierścienia, a grzejnik na zewnątrz pierścienia moglibyśmy, jako jedyny skutek, zamieniać bez ograniczenia ciepło z otoczenia na pracę mechaniczną, co jest sprzeczne z II zasadą termodynamiki. Gdyby A, B i C były nadprzewodnikami i gdyby przynajmniej na początku U_{AB} było różne od $U_{AC}+U_{CB}$, to płynący początkowo bardzo duży prąd zniszczyłby stan nadprzewodzący.