Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:

30 VI 1986

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Zadania z matematyki nr 129, 130

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

129. Sześciokąt wypukły ma pole S. Czy muszą istnieć trzy kolejne wierzchołki tego sześciokąta A, B, C takie, że pole T trójkąta ABC spełnia nierówność: a) $T \leqslant S/6$, b) $T \geqslant S/6$?

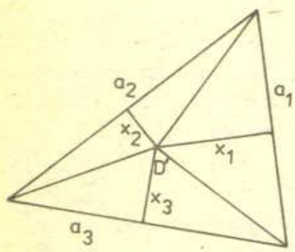
130. Znaleźć kres dolny wartości wyrażenia $\dfrac{1}{\sqrt[n]{m}} + \dfrac{1}{\sqrt[m]{n}}$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi.
Zadanie **130** przysłał pan Andrzej Koloniak z Sidziny.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1985

Przypominamy treść zadań:

121. W przestrzeni dany jest trójkąt ABC. Gdzie należy umieścić wierzchołek D czworościanu $ABCD$, by czworościan ten miał zadaną objętość V i minimalne pole powierzchni?

122. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ mające skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ i takie, że $f(xy) = f(x)+f(y)$ dla $x, y \in N$ względnie pierwszych.



121. Wzór $V = Sh/3$ (gdzie S = pole ABC) wyznacza wysokość czworościanu opuszczoną z wierzchołka D: $h = 3V/S$. Wierzchołek D musi więc leżeć na jednej z dwóch płaszczyzn równoległych do płaszczyzny ABC, odległych od niej o tę właśnie wartość h. Pozostaje ustalić położenie rzutu D' punktu D na płaszczyznę ABC. Niech a_1, a_2, a_3 będą długościami boków trójkąta ABC; przez x_1, x_2, x_3 oznaczmy odległości punktu D' od prostych zawierających odpowiednie boki (rysunek). Gdy D' jest punktem trójkąta ABC, zachodzi równość $\sum a_i x_i = 2S$; przy położeniach D' na zewnątrz trójkąta ABC suma $\sum a_i x_i$ jest większa. Zawsze więc $\sum a_i x_i \geqslant 2S$.
Pole S ściany ABC jest dane; podwojona suma pól pozostałych trzech ścian równa się $f(x_1, x_2, x_3) = \sum a_i \sqrt{h^2+x_i^2}$. Pokażemy, że suma ta jest najmniejsza, gdy $x_1 = x_2 = x_3$; będzie to oznaczało, że punkt D' jest środkiem koła wpisanego w trójkąt ABC. Promień tego koła równa się $r = 2S/\sum a_i$. Przekształcamy:

$$f(x_1, x_2, x_3)^2 = \sum a_i^2(h^2+x_i^2)+2\sum_{i<j} a_i a_j \sqrt{h^2+x_i^2}\sqrt{h^2+x_j^2} =$$
$$= \sum a_i^2 h^2 + \left(\sum a_i x_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} a_i a_j x_i x_j + 2\sum_{i<j} a_i a_j \sqrt{h^2+x_i^2}\sqrt{h^2+x_j^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sum a_i^2 h^2 + (2S)^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j\left(\sqrt{h^2+x_i^2}\sqrt{h^2+x_j^2} - x_i x_j\right);$$
$$f(r, r, r)^2 = \left(\sum a_i\right)^2(h^2+r^2) = \left(\sum a_i\right)^2 h^2 + (2S)^2 =$$
$$= \sum a_i^2 h^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j h^2 + (2S)^2.$$

Stąd

$$f(x_1, x_2, x_3)^2 - f(r, r, r)^2 \geqslant 2\sum_{i<j} a_i a_j\left(\sqrt{h^2+x_i^2}\sqrt{h^2+x_j^2} - x_i x_j - h^2\right) \geqslant 0$$

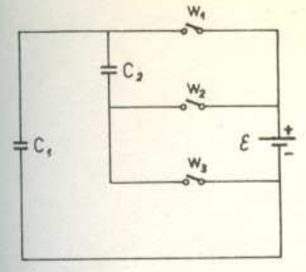
(jeśli $(x_1, x_2, x_3) \neq (r, r, r)$, to nierówność jest ostra), bo wyrażenie w nawiasie jest nieujemne dla dowolnych wartości x_i, x_j, h. Tak więc $f(x_1, x_2, x_3) \geqslant f(r, r, r)$, co oznacza, że pole powierzchni czworościanu jest minimalne, gdy rzut punktu D na płaszczyznę ABC pokrywa się ze środkiem koła wpisanego w trójkąt ABC.

122. Niech $g = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ i niech (p_i) będzie ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Oznaczmy $P_n = p_1 \ldots p_n$. Z warunku zadania przez oczywistą indukcję wynika, że $f(P_n) = f(p_1) + \ldots + f(p_n)$, a ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = g$, wnosimy stąd, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(p_n)$ jest zbieżny do sumy g. Zatem ciąg jego wyrazów dąży do zera, a że $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n) = g$, więc $g = 0$. Ustalmy liczby naturalne j i k. Dla $n > k$ mamy $f(P_n p_j^{k-1}) = f(p_1 \ldots p_{j-1} p_j^k p_{j+1} \ldots p_n) = f(p_1) + \ldots + f(p_{j-1}) + f(p_j^k) + f(p_{j+1}) + \ldots + f(p_n)$. Przy $n \to \infty$ lewa strona dąży do $g = 0$, wobec czego $f(p_j^k) = -\sum\limits_{i\neq j} f(p_i)$.
Otrzymane wyrażenie nie zależy od k. Zatem ciąg $(f(p_j^k))$ dla danego j jest stały, a przy tym zbieżny do $g = 0$. Znaczy to, że $f(p_j^k) = 0$ dla każdej pary liczb naturalnych j, k. Stąd i z warunku zadania wnosimy, że $f(n) = 0$ dla każdej liczby naturalnej n.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 117 /WT=3,31/ i 118 /WT=1,15/
z numeru 10/1985

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	47,07pkt
Marian Roman	- Ełk	43,09pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	42,93pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	41,68pkt
Dariusz Kurpiel	- Zarszyn	40,68pkt
Grzegorz Kuś	- Kraków	39,93pkt
Zbigniew Koza	- Jelenia Góra	38,48pkt
Wojciech Boratyński	- Warszawa	37,17pkt

Pan Janowicz już piąty raz !



Rys. 1

27. Rozważmy obwód przedstawiony na rysunku 1. W chwili początkowej wszystkie wyłączniki są rozwarte, a oba kondensatory — o pojemności odpowiednio C_1 i C_2 — nie naładowane. W pewnym momencie zwieramy wyłączniki W_1 i W_3, a po jakimś czasie je rozwieramy i następnie zwieramy wyłącznik W_2. Jaka będzie wartość i znak końcowego napięcia na kondensatorze C_2? Siła elektromotoryczna ogniwa (o małym oporze wewnętrznym) wynosi $\mathscr{E}$.

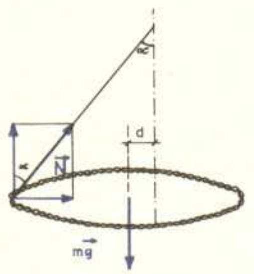
28. Traktując cząsteczkę jodku cezu (CsI) jako sztywny układ dwóch naładowanych przeciwnymi ładunkami ($\pm$ $1{,}6 \cdot 10^{-19}$C) punktów materialnych (reprezentujących jony Cs^+ oraz I^-) o jednakowych masach $2 \cdot 10^{-25}$ kg, oddalonych od siebie o $3 \cdot 10^{-10}$ m, obliczyć częstotliwość drgań, jakie cząsteczka ta będzie wykonywała w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $3 \cdot 10^6$ V/m po nagłej zmianie kierunku pola o niewielki kąt. Efekty kwantowe oraz drgania termiczne należy zaniedbać.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1985

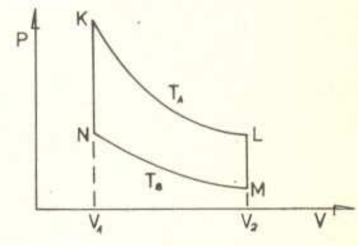
Przypominamy treść zadań:

19. Zamknięty metalowy łańcuszek, połączony lekką nicią z pionową, wirującą osią, wiruje z prędkością kątową ω przyjmując kształt kołowy jak na rysunku 2. Nić tworzy przy tym kąt α z pionem. Znaleźć odległość między środkiem ciężkości łańcuszka a osią obrotu.

20. W maszynie cieplnej przedstawionej schematycznie w górnej części rysunku 4 zachodzi proces kołowy składający się z dwóch przemian izotermicznych i dwóch przemian izochorycznych (rys. 3). Dwie części tej maszyny (oznaczone A i B) utrzymywane są w stałych temperaturach — odpowiednio T_A i T_B ($T_A > T_B$). Między nimi znajduje się część pośrednia R, przez którą może przepływać z cylindra c_A do cylindra c_B lub odwrotnie stosowany jako ciało robocze gaz doskonały. Jaką funkcję spełnia w maszynie część R? Podać, jakie powinna mieć ona cechy (jak może być zbudowana), aby funkcja ta była spełniana w sposób możliwie optymalny, tj. zapewniający sprawność maszyny zbliżoną do teoretycznej. Opisać ruchy tłoków t_A i t_B i ich wzajemną korelację konieczną do zapewnienia działania maszyny zgodnego z podanym cyklem:
(a) podczas pracy maszyny jako silnika cieplnego oraz
(b) podczas pracy maszyny jako pompy cieplnej.



Rys. 2



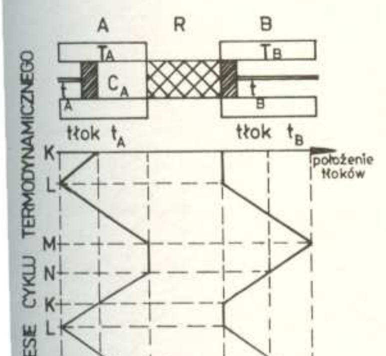
Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 15 /WT=3,10/ i 16 /WT=2,01/
z numeru 10/1985

Piotr Bała	- Toruń	33,93pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	24,27pkt

19. Niech odległość środka ciężkości łańcuszka od osi obrotu wynosi d (rys. 2). Na łańcuszek działa siła ciężkości mg oraz siła naprężenia nici N. Składowa pionowa siły N równoważy siłę ciężkości: $N \cos \alpha = mg$. Składowa pozioma tej siły równoważy działającą na środek masy w wirującym układzie odniesienia siłę odśrodkową: $N \sin \alpha = m\omega^2 d$. Z równań tych znajdujemy $d = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} \alpha$.

20. Procesy izotermicznego sprężania lub rozprężania gazu zachodzą każdorazowo w jednym z cylindrów c_A, c_B. Przemiany izochoryczne wiążą się natomiast z przemieszczaniem gazu z jednego cylindra do drugiego. Podczas jednej z tych przemian ($c_A \rightarrow c_B$) gaz oddaje pewną ilość ciepła, podczas drugiej ($c_B \rightarrow c_A$) — gaz pobiera taką samą ilość ciepła. Wnioskujemy stąd, że część R winna pełnić rolę akumulatora, pobierającego energię od gazu podczas jego przepływu z c_A do c_B — z czym wiąże się obniżenie temperatury od T_A do T_B — i oddającego tę energię z powrotem podczas przepływu gazu w przeciwnym kierunku — z czym wiąże się ogrzanie gazu od temperatury T_B do T_A.
W idealnym przypadku podczas przemian izochorycznych zachodzi odwracalny proces wymiany ciepła jedynie między gazem a częścią R; wymiana ciepła ze ściankami cylindrów odbywa się wyłącznie podczas przemian izotermicznych. Część R, nazywana regeneratorem, dla optymalnego spełniania swych funkcji powinna mieć odpowiednio dużą pojemność cieplną (winna być jednocześnie zapewniona dobra wymiana ciepła z gazem), małą objętość przestrzeni dla gazu w porównaniu z objętością V_1, małe opory dla przepływu gazu, mały współczynnik przewodzenia ciepła w kierunku $c_A \rightarrow c_B$ (temperatura powierzchni granicznych regeneratora powinna przez cały czas wynosić odpowiednio T_A i T_B).
Regenerator może być na przykład zbudowany z perforowanych blach metalowych, ustawionych prostopadle do kierunku przepływu gazu i nie stykających się bezpośrednio z sobą, może też być wypełniony kulkami metalowymi (małe powierzchnie wzajemnego kontaktu).
Wzajemnie skorelowane ruchy tłoków dla przypadku silnika cieplnego oraz pompy cieplnej przedstawia rysunek 4 (w urządzeniach technicznych oba tłoki poruszają się ruchem harmonicznym z odpowiednim przesunięciem fazowym względem siebie). Oba te przypadki różnią się jedynie kierunkiem pracy maszyny — co za tym idzie — kierunkiem obiegu procesu kołowego: w silniku zachodzi proces KLMNK, w maszynie cieplnej — proces KNMLK (rys. 3). Maszyna cieplna działająca na zasadzie opisanego tu cyklu Stirlinga jest stosowana m.in. do skraplania helu.



Rys. 4