Niech $(A_k)_{k=0}^{\infty}$ będzie projekcją normalną punktu $(a_1, \ldots, a_n)$ względem mediany φ. Konstruujemy teraz projekcję $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ punktu $(b_1, \ldots, b_n)$ względem mediany ψ: jeśli A_{k+1} powstał z A_k przez uśrednienie współrzędnych $a_i^{(k)}$ oraz $a_j^{(k)}$, to B_{k+1} powstaje z B_k przez uśrednienie współrzędnych $b_i^{(k)}$ oraz $b_j^{(k)}$. Oczywiście, projekcja (B_k) też jest normalna.
Wówczas

$$A_k \to (a_0 \ldots, a_0), \qquad a_0 = \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{1/p},$$

$$B_k \to (b_0 \ldots, b_0), \qquad b_0 = \left(\frac{b_1^q + \ldots + b_n^q}{n}\right)^{1/q}.$$

Oznaczając

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_n) = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$$

mamy zgodnie z (3)

$$f(A_k; B_k) \leqslant f(A_{k+1}; B_{k+1}) \qquad \text{dla } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Stąd i z ciągłości funkcji f mamy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = f(A_0; B_0) \leqslant \lim_{k\to\infty} f(A_k; B_k) = f(a_0, \ldots, a_0; b_0, \ldots, b_0) =$$

$$= n\left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}\left(\frac{b_1^q + \ldots + b_n^q}{n}\right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Przy dowodzeniu różnych nierówności stosowaliśmy różne mediany. Skąd wiadomo, jaką medianę zastosować przy dowodzie konkretnej nierówności? Nierówności dowodzone w zadaniach 1 i 2 są postaci

$$(4) \qquad f_n(a_1, \ldots, a_n) \leqslant g_n(a_1, \ldots, a_n) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Otóż można uzasadnić, że jeżeli taka nierówność da się udowodnić wyżej prezentowaną metodą, to mediana φ musi spełniać warunek

$$(5) \qquad f_2(\varphi(x, y), \varphi(x, y)) = g_2(x, y)$$

(w przypadku zadań 1 i 2 mediana φ rzeczywiście spełnia ten warunek). Tak więc chcąc udowodnić nierówność (4) wpierw wyznaczamy medianę z warunku (5).
Nie zawsze jednak nierówność (4) daje się udowodnić wyżej opisaną metodą.

W przypadku zadania 3 sytuacja jest trochę inna, gdyż występująca tam nierówność nie jest nierównością typu (4). Można się jednak dopatrzyć dużych podobieństw i uogólnić warunek (5) na inne rodzaje nierówności.

Prezentowana metoda dowodzenia nierówności nadaje się do dowodzenia nierówności innych typów (oczywiście nie wszystkich), można bowiem z powodzeniem znajdować jej modyfikacje.

Zadania

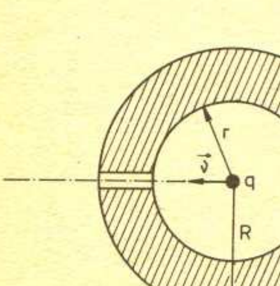
Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 427. W wierzchołku trójkąta stoi pionek. Przestawiamy go do losowo wybranego jednego z pozostałych wierzchołków (szanse wyboru każdego spośród dwóch sąsiednich wierzchołków są równe). Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo tego, że po n krokach pionek stoi w wyjściowym wierzchołku. Znaleźć $\lim_{n\to\infty} p_n$.
Rozwiązanie na str. 5

M 428. Na kuli o promieniu r opisano wielościan o polu powierzchni S. Znaleźć jego objętość.
Rozwiązanie na str. 6

M 429. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczby $k^3 + 2k$ i $k^4 + 3k^2 + 1$ są względnie pierwsze.
Rozwiązanie na str. 13

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ



F 192. Wewnątrz umocowanej, przewodzącej, nie naładowanej kuli o promieniu R znajduje się kuliste wydrążenie o promieniu r, którego środek pokrywa się ze środkiem kuli. Jaką minimalną prędkość należy nadać znajdującej się w środku kuli cząstce o masie m i ładunku q, aby po przejściu przez wąski otwór w kuli odleciała w nieskończoność?
Rozwiązanie na str. 5

F 193. Kulkę metalową oświetlono światłem o częstości ν większej od częstości granicznej dla zjawiska fotoelektrycznego. Kulka znajduje się w próżni, a jej promień wynosi r. Jaki ładunek ustali się na kulce, jeżeli praca wyjścia dla metalu, z którego jest ona wykonana, wynosi W?
Rozwiązanie na str. 4