Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1986

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty”

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 115 /WT=1,46/ i 116 /WT=2,59/

Andrzej Pawłowski	- Zabrze	45,10pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	43,27pkt
Marian Roman	- Ełk	43,09pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	42,93pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	41,68pkt
Grzegorz Kuś	- Kraków	39,93pkt
Zbigniew Koza	- Jelenia G.	38,48pkt
Dariusz Kurpiel	- Zarszyn	36,22pkt

Pan Pawłowski po raz trzeci przekracza sumę 44.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 13 /WT=2,06/ i 14 /WT=2,99/

Piotr Bała	- Toruń	30,99pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	20,49pkt

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Zadania z matematyki nr 127, 128

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

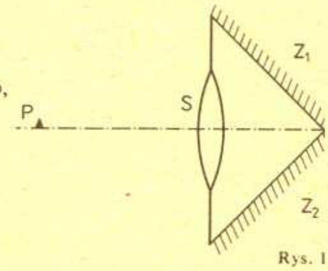
127. Czy istnieje w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej zbiór mający dokładnie 6 osi symetrii?

128. Niech K będzie zbiorem punktów płaszczyzny (x, y) o współrzędnych $x, y \in \{1, ..., p\}$, gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą, $p \geqslant 3$. Udowodnić, że w zbiorze K można znaleźć p punktów, wśród których nie ma trzech punktów współliniowych.
Zadanie **128** przysłał pan Jarosław Cel z Łodzi

Zadania z fizyki nr 25, 26

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

25. Rysunek 1 przedstawia układ optyczny, w którym dwa zwierciadła płaskie Z_1 i Z_2, prostopadłe do siebie, tworzą dwie ściany graniastosłupa o podstawie trójkąta równoramiennego. W trzeciej ścianie (nieprzezroczystej) tego graniastosłupa umieszczono soczewkę skupiającą S o ogniskowej f w taki sposób, że jej oś optyczna przecina prostopadle krawędź styku zwierciadeł, a jedno z ognisk soczewki leży na tej krawędzi. Znaleźć położenie i powiększenie wytworzonego przez ten układ obrazu małego przedmiotu P, znajdującego się w pobliżu osi optycznej soczewki w odległości $1,5\,f$ od niej.



Rys. 1

26. Czy pocisk wystrzelony z powierzchni Księżyca z prędkością $-\mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v}$ jest chwilową prędkością Księżyca w jego ruchu wokół Ziemi: (a) spadnie na Księżyc, (b) spadnie na Ziemię, czy też (c) wejdzie na orbitę dookoła któregoś z tych ciał (którego)? Odpowiedź uzasadnić. Niezbędne dane należy wziąć z tablic.

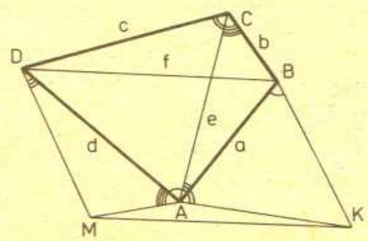
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1985

Przypominamy treść zadań:

119. Dany ciąg liczb dodatnich (a_n), $a_n < a_{n+1}+a_n^2$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. Czy szereg $\sum a_n$ musi być rozbieżny?
120. Kolejne boki czworokąta mają długości a, b, c, d, a przekątne mają długości e i f. Suma miar kątów przeciwległych wynosi ω. Dowieść, że $(ac)^2+(bd)^2-2abcd\cos\omega = (ef)^2$.

119. Tak. Przypuśćmy, że $\sum a_n < \infty$. Wówczas $a_n \leqslant 1/2$ dla $n \geqslant n_0$. Niech $c = 1/2a_{n_0}$; $c \geqslant 1$. Udowodnimy, że dla $k = 0, 1, 2, ...$ zachodzi nierówność (*) $a_{n_0+k} \geqslant (2c+2k)^{-1}$. Dla $k = 0$ mamy równość. Załóżmy prawdziwość (*) dla pewnego k. Funkcja $f(x) = x-x^2$ jest rosnąca w przedziale $[0,1/2]$, a zatem $a_{n_0+k+1} \geqslant a_{n_0+k}-a_{n_0+k}^2 = f(a_{n_0+k}) \geqslant f((2c+2k)^{-1}) = (2c+2k)^{-1}-(2c+2k)^{-2}$ i dowód (indukcyjny) nierówności (*) będzie zakończony, jeśli pokażemy, że ostatnie wyrażenie jest $\geqslant (2c+2(k+1))^{-1}$; to zaś jest kwestią elementarnego rachunku. Z nierówności (*) wynika rozbieżność szeregu $\sum a_n$, wbrew uprzedniemu przypuszczeniu.

120. Niech w czworokącie $ABCD$ (rysunek) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$. Na bokach $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, na zewnątrz czworokąta, zbudujmy trójkąty ABK i ADM podobne, odpowiednio, do trójkątów CAD i CAB, tak, że $|\sphericalangle ABK| = |\sphericalangle CAD|$, $|\sphericalangle KAB| = |\sphericalangle DCA|$, $|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle CAB|$, $|\sphericalangle MAD| = |\sphericalangle BCA|$. Wówczas $AK = ac/e$, $AM = bd/e$, $BK = ad/e = DM$. Ponadto $|\sphericalangle KBD|+|\sphericalangle BDM| = |\sphericalangle KBA| + |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle CAB| = 180°$, a więc czworokąt $KBDM$ jest równoległobokiem. Zatem $KM = BD = f$. Miara kąta KAM (wypukłego lub wklęsłego) równa jest $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD|$, czyli ω lub $360° - \omega$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta KAM dostajemy $KM^2 = AK^2+AM^2-2AK\cdot AM\cos\omega$, co po podstawieniu $AK = ac/e$, $AM = bd/e$ i pomnożeniu stronami przez e^2 daje tezę zadania.
Uwaga. Udowodniona równość nosi nazwę *twierdzenia Bretschneidera* lub *twierdzenia cosinusów dla czworokąta*.



Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1985

Przypominamy treść zadań:

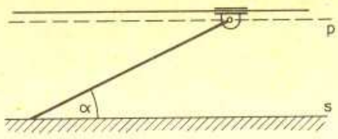
17. Jednorodny, sztywny, cienki pręt o masie m, którego górny koniec jest zamocowany przegubowo w taki sposób, że może się poruszać (bez tarcia) tylko po poziomej prostej p, spoczywa swym dolnym końcem na płaskim, sztywnym, poziomym podłożu s — jak na rysunku 2. Pręt leży w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez prostą p i jest nachylony pod kątem α względem podłoża. Współczynnik tarcia statycznego pręta o podłoże wynosi f. Obliczyć, z jaką siłą F skierowaną wzdłuż prostej p należy działać na górny koniec pręta, aby przesunąć go po podłożu. Odległość p-s pozostaje stała, niezależnie od wartości siły F.

18. Przed aparatem fotograficznym nastawionym „na nieskończoność" umieszczono w odległości dwóch ogniskowych od obiektywu cienki, czarny krążek o średnicy D. Płaszczyzna krążka jest prostopadła do osi optycznej obiektywu, a jego środek leży na tej osi. Obliczyć średnice obszarów na błonie fotograficznej, które po wykonaniu zdjęcia będą (a) całkowicie i (b) częściowo zakryte przez obraz krążka. Średnica otworu obiektywu wynosi $d < D$. Obiektyw traktujemy jako soczewkę cienką, a dyfrakcję zaniedbujemy.

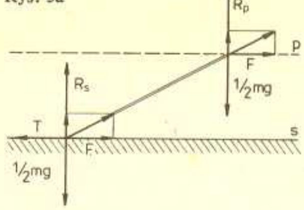
17. W celu przesunięcia pręta po podłożu trzeba pokonać siłę tarcia, równą $T = fN$, gdzie T — maksymalna wartość siły tarcia statycznego, N — siła nacisku pręta na podłoże. Musi więc zachodzić $F = T$. W przypadku, gdy siła F „popycha" pręt (rys. 3a), mamy $N = mg/2 + F\,\mathrm{tg}\,\alpha$ i z powyższych związków otrzymujemy $F = \dfrac{fmg}{2(1-f\,\mathrm{tg}\,\alpha)}$.

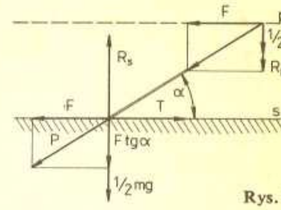
Przesunięcie pręta jest możliwe tylko przy spełnionym warunku $f\,\mathrm{tg}\,\alpha < 1$, w przeciwnym razie następuje „zaklinowanie" pręta. W przypadku ciągnięcia pręta przez siłę F (rys. 3b) siła nacisku jest równa $N = mg/2 - F\,\mathrm{tg}\,\alpha$ i w konsekwencji

$$F = \frac{fmg}{2(1+f\,\mathrm{tg}\,\alpha)}.$$

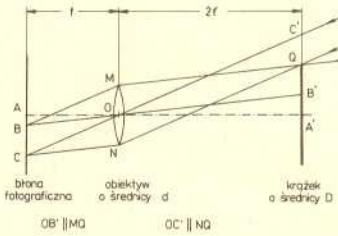


Rys. 2

Rys. 3a




Rys. 3b



Rys. 4

18. Jak widać z rysunku 4, do punktów położonych na odcinku AB promienie świetlne spoza krążka nie docierają w ogóle (cień całkowity), do punktów położonych na odcinku BC docierają promienie przechodzące tylko przez część soczewki (półcień). Cień krążka obejmuje więc obszar koła o promieniu $r = AB$, półcień — obszar pierścienia o promieniach $R = AC$ i $r = AB$. Z prostych rozważań geometrycznych wyznaczamy obie średnice: $2r = (D-d)/2$ oraz $2R = (D+d)/2$.

Jak obserwować plamy słoneczne?

Beata GAŁECKA

Autorka jest uczennicą III klasy XIX Liceum Ogólnokształcącego im. Powstańców Warszawy w Warszawie.

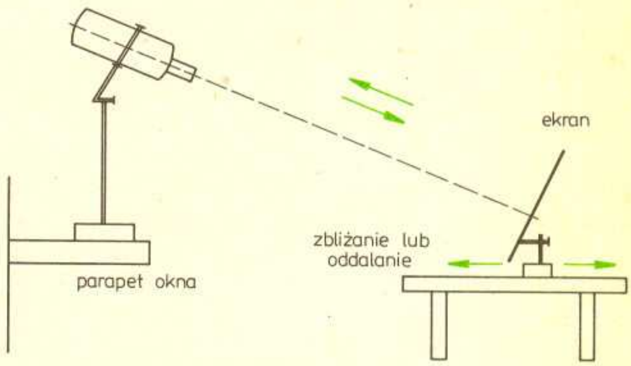
Jak wiadomo z przekazów historycznych i obserwacji współczesnych, plamy na Słońcu można dostrzec nawet gołym okiem. Jednak tak sprzyjające okoliczności zdarzają się nieczęsto.

W szkole do obserwowania plam słonecznych używamy lunetki o ogniskowej obiektywu $f_{ob} \approx 22$ cm, okularu — $f_{ok} \approx 2{,}2$ cm, czyli o powiększeniu około 10 razy. Średnica obiektywu lunetki wynosi 45 mm.

Lunetkę zamocowaną na stelażu z prętów laboratoryjnych ustawiamy w oknie i kierujemy na Słońce. Salę zaciemniamy zasłonami laboratoryjnymi. Można dodatkowo zaciemnić miejsca wokół lunetki, przez które przenika światło, zasłoną z ciemnego materiału, kocem itp.

Obraz Słońca rzucamy na ekran ustawiony prostopadle do osi lunety, w niewielkiej na razie odległości od okularu. Ekranem może być arkusz gładkiego, białego papieru nałożony na sztywną tekturę lub sklejkę. Ostrość obrazu uzyskujemy przez obrót okularu o pewien kąt, a także przez zbliżenie lub oddalenie ekranu od okularu lunetki. W moich obserwacjach, przeprowadzanych wielokrotnie, przyjęłam, że ekran będzie ustawiony w takiej odległości od okularu, aby średnica tarczy słonecznej na ekranie wynosiła 10 cm. Jeżeli w dniu obserwacji na powierzchni Słońca są plamy, to na ekranie są widoczne w pobliżu pasa równikowego Słońca jako ciemne plamki o różnych kształtach. Można również przeprowadzić obliczenia wielkości plam.

Jeśli na przykład zaobserwowaliśmy plamę o rozmiarze 0,4 cm, a średnica obrazu Słońca wynosiła 10 cm, to na rozmiar plamy otrzymujemy $\dfrac{0{,}4}{10} \cdot$ średnica Słońca ($= 1{,}4 \cdot 10^6$ km), czyli 56 000 km.



Uwaga: przez lunetkę nie wolno patrzeć na Słońce, grozi oślepienie!

Rozmiar plamki na ekranie zależy od jakości użytego sprzętu optycznego. W wyniku różnych deformacji obraz może być rozmyty i wtedy podobne rachunki prowadzą do zawyżenia rozmiarów plamy. Otrzymany wynik można sprawdzić: otóż plamy słoneczne o średnicy większej niż 38 000 km są doskonale widoczne gołym okiem (należy uważać, aby nie narazić oka na olśnienie).

Serdecznie zachęcam do obserwacji, a tych, którzy chcą się dowiedzieć czegoś o plamach słonecznych, odsyłam do książki: H. Newton, *Oblicze Słońca*, PWN, Warszawa 1961.

Oprócz pomiarów wielkości plam możecie spróbować zaobserwować zmiany położenia plam na powierzchni Słońca. Obserwując plamy słoneczne przez kilkanaście dni zauważycie, że niektóre z nich znikają w pobliżu brzegu tarczy, a po przeciwnej stronie pojawiają się nowe. Spróbujcie co dwa, trzy dni rysować położenia plam na tarczy Słońca. Po około dwóch tygodniach obserwacji zauważycie, że grupy plam przesuwają się w podobny sposób. Jest to spowodowane przede wszystkim obrotem Słońca — plamy poruszają się wzdłuż równoleżników na Słońcu — możecie w ten sposób wyznaczyć okres obrotu i położenie osi obrotu Słońca. Kierunek poruszania się plam po powierzchni Słońca zależy od pory roku. Dzieje się tak dlatego, że oś obrotu Słońca jest nachylona do orbity Ziemi, zatem w miarę przesuwania się Ziemi po orbicie widzimy obracającą się tarczę Słońca pod różnymi kątami. Spróbujcie określić, jak zmienia się położenie osi obrotu Słońca w kolejnych porach roku.