Kącik olimpijski

Bardzo duże zastosowanie w dowodzeniu nierówności ma nierówność Cauchy'ego między średnią arytmetyczną i geometryczną:

jeżeli $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$, to $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Poniższe nierówności można udowodnić wykorzystując tę nierówność.

Zadanie. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \leqslant \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{x_3^8}{8} + \ldots + \frac{x_n^{2^n}}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

(zadanie 2 z zawodów II stopnia XXXI Olimpiady)

Dowód. Załóżmy najpierw, że $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$. Rozważmy liczby

$$\underbrace{x_1^2, \ldots, x_1^2}_{2^{n-1}\ \text{liczb}}, \underbrace{x_2^{2^2}, \ldots, x_2^{2^2}}_{2^{n-2}\ \text{liczb}}, \ldots, \underbrace{x_{n-2}^{2^{n-2}}, \ldots, x_{n-2}^{2^{n-2}}}_{2^2\ \text{liczb}}, \underbrace{x_{n-1}^{2^{n-1}}, x_{n-1}^{2^{n-1}}}_{2^1\ \text{liczb}}, x_n^{2^n}, 1.$$

Średnia arytmetyczna tych liczb wynosi

$$\frac{1}{2^n}\left(2^{n-1}x_1^2 + 2^{n-2}x_2^{2^2} + \ldots + 2^1 x_{n-1}^{2^{n-1}} + x_n^{2^n} + 1\right) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^{2^2}}{2^2} + \ldots + \frac{x_n^{2^n}}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Średnia geometryczna tych liczb wynosi

$$\sqrt[2^n]{x_1^{2^n} \cdot x_2^{2^n} \cdot \ldots \cdot x_n^{2^n} \cdot 1} = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Stąd na mocy nierówności Cauchy'ego otrzymujemy żądaną nierówność.

Jeśli teraz nie wszystkie liczby $x_1, \ldots, x_n$ są nieujemne, to wobec

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leqslant |x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|, \qquad |x_i^2| = x_i^2$$

i na mocy już udowodnionego też spełniają nierówność.

Zadanie 1. Niech $n \geqslant 2$ i niech $a, x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Dowieść, że

$$\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1} \geqslant \frac{n^2}{2(x_1 + \ldots + x_n)}$$

wskazać, w jakim przypadku zachodzi równość.

(zadanie 3 z VII Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych)

Zadanie 2. Dowieść, że jeśli suma liczb dodatnich a, b, c jest równa 1, to

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9.$$

(zadanie 6 z zawodów I stopnia II Olimpiady)

Zadanie 3. Udowodnić, że dla każdego naturalnego n i dowolnych liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniona jest nierówność

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^k}{k!}.$$

(zadanie przygotowawcze z XXVI Olimpiady)

Zadanie 4. Dowieść, że jeśli a, b, c, d są liczbami dodatnimi, to zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geqslant \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

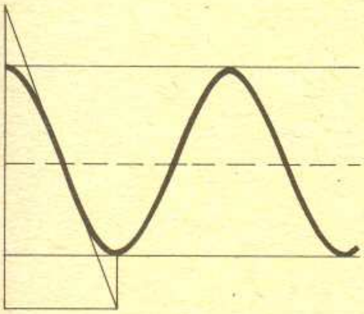
(zadanie 9 z zawodów I stopnia IX Olimpiady)

Piotr HAJŁASZ

Brzydki błąd

Pan mgr Adam Kleiner z Krakowa zwrócił nam uwagę, że w nr 12/1985 źle narysowaliśmy cień linii śrubowej.

Rzeczywiście. Linia śrubowa powstaje z obwinięcia walca trójkątem prostokątnym, a więc na cieniu daje linię będącą sinusoidą, a nie łamaną, co ilustruje rysunek.



Oczywiście również zły jest cień helikoidy, bo jego brzeg jest właśnie linią śrubową.

Bardzo dziękujemy p. Kleinerowi i przepraszamy Czytelników.