Cudowna własność liczby $\frac{1}{54}(2\sqrt{13}-5)\sqrt{2\sqrt{13}+22}$

W jednym ze starszych numerów *American Mathematical Monthly* (tom 44, 1937, str. 579—583) znaleźliśmy ciekawe twierdzenie Williamsa. Warto je chyba przedstawić w *Delcie*.

W każdym trójkącie zachodzi nierówność

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\gamma \leqslant \frac{1}{54}(2\sqrt{13}-5)\sqrt{2\sqrt{13}+22}$$

i oszacowania nie da się poprawić, tj. istnieje trójkąt, w którym powyższa nierówność staje się równością.

Dla dowodu oznaczmy $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\gamma$ przez R. Ponieważ $\gamma = \pi-(\alpha+\beta)$ (zob. [1] w spisie literatury), więc (zob. [2]): $R = \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Połóżmy teraz $\alpha = x+d$, $\beta = x-d$, $y = \cos x$, $k = 1-\cos d$, i po prostych przekształceniach otrzymujemy $R = y\sqrt{-y^4+2y^3-2y+1} - ky\sqrt{1-y^2}$.

Chcemy znaleźć największą wartość funkcji R na zbiorze $\{(k, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant k \leqslant 1\}$. Standardowe metody (zróżniczkować i przyrównać do zera ...) raczej zawodzą. Chyba, że ktoś z Czytelników ... My skorzystamy z tożsamości, prawdziwej dla każdego a:

$$(y^2-2ay+a^2)(y^4+2(a-1)y^3+a(3a-4)y^2+2(a-1)^2(2a+1)y+a(a-1)^2(2a+1)) =$$
$$= y^6-2y^5+2y^3-(3a^4-5a^3+3a)y^2+a^3(a-1)^2(2a+1).$$

W dalszym ciągu będziemy zainteresowani wyborem a tak, by współczynnik przy y^2 był równy -1, tj.

$$3a^4-5a^3+3a-1 = 0,$$

tzn. $(a^2-2a+1)(3a^2+a-1) = 0$, skąd

$$a = 1 \quad \text{lub} \quad a = \frac{1}{6}(-1\pm\sqrt{13}).$$

W dalszym ciągu za a przyjmiemy wartość $\frac{1}{6}(-1+\sqrt{13}) \approx 0{,}4343 < \frac{1}{2}$.

Oznaczając znów $c = 2(a-1)^2(2a+1)$, $h = a(a-1)^2(2a+1)$ mamy po niekrótkich acz zrozumiałych przekształceniach

$$R = \sqrt{a^2h-(y-a)^2(y^4+2(a-1)y^3+a(3a-4)y^2+cy+h)} - ky\sqrt{1-y^2}$$

i zadanie prawie rozwiązane: jeżeli wielomian czwartego stopnia widoczny pod pierwiastkiem powyżej jest dodatni dla $0 \leqslant y \leqslant 1$, to w punkcie $y = a$, $k = 0$ mamy, oczywiście, szukaną największą wartość wynoszącą właśnie tyle, ile twierdzimy. Sprawdzenie, że wielomian $y^4+2(a-1)y^3+a(3a-4)y^2+2(a-1)^2(2a+1)y+a(a-1)^2(2a+1)$ przyjmuje w przedziale $(0,1)$ wartości dodatnie, jest może łatwe dla posiadaczy kalkulatorów elektronicznych. K. P. Williams o takim przyrządzie nie słyszał, więc użył prawie zapomnianej dziś metody zwanej łańcuchem Sturma. Przedstawimy te rachunki. Oznaczmy

$$f(a, y) = y^4+2(a-1)y^3+a(3a-4)y^2+2(a-1)^2(2a+1)y+a(a-1)^2(2a+1).$$

Mamy $f\left(\frac{1}{2}, y\right) = y^4-y^3-\frac{5}{4}y^2+y+\frac{1}{4} = (y-1)(y+1)\left(y^2-y-\frac{1}{4}\right) > 0$,
gdy $0 < y < 1$,
$f(1, y) = y^4-y^2 = y^2(y^2-1) < 0$ dla $0 < y < 1$,
$f\left(\frac{4}{3}, y\right) = y^4+2\left(\frac{4}{3}-1\right)y^3+2\left(\frac{4}{3}-1\right)^2\left(\frac{8}{3}-1\right)y+\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-1\right)^2\left(\frac{8}{3}+1\right) > 0$ dla $y > 0$.
Porządkując teraz $f(a, y)$ względem potęg a mamy
$f(a, y) = 2a^4+(4y-3)a^3+3y(y-2)a^2+(2y^3-4y^2+1)a+(y^4-2y^3+2y)$
i widzimy, że współczynnik przy a przyjmuje wartość zero między $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$ i między 1 i 2, a „wyraz wolny” y^4-2y^3+2y jest dodatni przy $y > 0$. Zatem w równaniu $f(a, y) = 0$ są dwie zmiany znaku dla $y < 1$, a więc nie więcej niż dwa pierwiastki przy $y < 1$. Ale, jak zauważyliśmy, dla $y < 1$ $f\left(\frac{1}{2}, y\right) > 0$, $f(1, y) < 0$, $f\left(\frac{4}{3}, y\right) > 0$, tak że dla $y < 1$ jest jeden pierwiastek między $\frac{1}{2}$ i 1 i jeden między 1 a $\frac{4}{3}$. Zatem gdy $a < \frac{1}{2}$, nasze równanie nie ma pierwiastków względem y mniejszych od jedności $\left(\text{a jak widzieliśmy, } \frac{1}{6}(-1+\sqrt{13}) \approx 0{,}4343 < \frac{1}{2}\right)$.

Po prostych obliczeniach okazuje się, że trójkąt, w którym powyższe maksimum ($\approx 0{,}2213$) jest osiągane, ma kąty $\alpha = \beta = 64°15'30''$, $\gamma = 51°29'$. I kto by to pomyślał?

dr Michał SZUREK

Literatura:
1. Euklides, *Elementy*, Aleksandria, 300 r. p.n.e.,
2. *Trygonometria*, dowolny podręcznik.

Rozwiązanie zadania M 428. Rozpatrzmy ostrosłup o wierzchołku w środku kuli i podstawie będącej ścianą wielościanu. Jeśli pole powierzchni ściany wynosi P, to objętość ostrosłupa wynosi $\frac{1}{3}rP$. W takim razie wielościan, składający się z takich właśnie ostrosłupów, ma objętość $\frac{1}{3}rS$.