Co udowodnił Jerrold B. Tunnell?

Doc. dr Jerzy BROWKIN

Twierdzenie Pitagorasa mówi, że jeżeli X i Y są długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, a Z — długością jego przeciwprostokątnej, to

$$X^2+Y^2 = Z^2. \tag{1}$$

Oczywiście, pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2}XY$. W dalszym ciągu ograniczymy się do rozpatrywania trójkątów prostokątnych, których długości boków są liczbami wymiernymi, tzn. będziemy rozpatrywać rozwiązania równania (1) w liczbach wymiernych dodatnich X, Y, Z. Już w starożytności zajmowano się zagadnieniem: Czy pole takiego trójkąta może być równe danej liczbie naturalnej n? To znaczy, chodzi o znalezienie takich liczb wymiernych X, Y, Z spełniających (1), że $\frac{1}{2}XY = n$. Liczby n o tej własności nazywamy liczbami kongruentnymi.

Na przykład liczby $X = 3$, $Y = 4$, $Z = 5$ spełniają (1) oraz $\frac{1}{2}XY = 6$. To znaczy liczba 6 jest kongruentna. Podobnie, liczby $X = 6\frac{2}{3}$, $Y = 1\frac{1}{2}$, $Z = 6\frac{5}{6}$ spełniają (1) (Czytelnik zechce to sprawdzić) oraz $\frac{1}{2}XY = 5$. Zatem 5 jest liczbą kongruentną.

Z drugiej strony, gdyby liczba 2 była kongruentna, to dla pewnych liczb wymiernych X, Y, Z spełniających (1) mielibyśmy $\frac{1}{2}XY = 2$, tzn. $XY = 4$. Wtedy

$$X^4+2^4 = X^4+(XY)^2 = X^2\cdot(X^2+Y^2) = (XZ)^2.$$

Wiadomo jednak, że równanie $a^4+b^4 = c^2$ nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych a, b, c różnych od zera. Zatem liczba 2 nie jest kongruentna.

Zauważmy jeszcze, że liczba n jest kongruentna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalnej m liczba m^2n jest kongruentna. Jeżeli bowiem pole trójkąta prostokątnego o bokach długości X, Y, Z jest równe n, to pole trójkąta doń podobnego o bokach długości mX, mY, mZ jest równe m^2n. Wobec tego przy badaniu liczb kongruentnych wystarczy ograniczyć się do liczb bezkwadratowych, tzn. niepodzielnych przez żaden kwadrat liczby naturalnej większej od 1. Tak więc z tego, że liczba 2 nie jest kongruentna, wynika, że liczba 8 nie jest kongruentna itp.

Zagadnienie wyznaczenia wszystkich liczb kongruentnych lub chociażby podania efektywnej metody zbadania, czy dana liczba naturalna n jest kongruentna — okazało się trudne i do dziś nie zostało w pełni rozwiązane. Uzyskiwano jedynie wyniki częściowe dotyczące tylko pewnych liczb naturalnych n.

W tym artykule omówimy pewien wynik uzyskany ostatnio, który niemal całkowicie rozstrzyga problem wyznaczania liczb kongruentnych.

Badanie rozwiązań w liczbach wymiernych X, Y, Z układu równań

$$X^2+Y^2 = Z^2, \qquad \frac{1}{2}XY = n \tag{2}$$

można sprowadzić do badania rozwiązań w liczbach wymiernych U, W różnych od zera jednego tylko równania

$$U^2 = W^3-n^2W. \tag{3}$$

Mianowicie, jeżeli liczby wymierne X, Y, Z spełniają układ (2), to liczby $U = \frac{1}{8}Z(X^2-Y^2)$ oraz $W = \frac{1}{4}Z^2$ są wymierne, różne od zera i spełniają równanie (3). Mamy bowiem

$$U^2 = \frac{1}{64}Z^2(X^2-Y^2)^2 = \frac{1}{64}Z^2((X^2+Y^2)^2-4X^2Y^2) =$$

$$= \frac{1}{4}Z^2\left(\left(\frac{1}{4}Z^2\right)^2-\left(\frac{1}{2}XY\right)^2\right) = W(W^2-n^2) = W^3-n^2W.$$

Na odwrót, jeżeli liczby wymierne U, W, różne od zera, spełniają równanie (3), to przyjmując

$$X = \frac{W^2-n^2}{U}, \qquad Y = \frac{2Wn}{U}, \qquad Z = \frac{W^2+n^2}{U}$$

otrzymamy, jak łatwo sprawdzić, rozwiązanie układu równań (2) w liczbach wymiernych. Badanie rozwiązań równania (3) w liczbach wymiernych jest o tyle łatwiejsze, że równanie to opisuje tzw. krzywą eliptyczną, a teoria krzywych eliptycznych jest bardzo rozwinięta i dostarcza różnych silnych metod do badania punktów o współrzędnych wymiernych na tych krzywych. Posługując się właśnie takimi zaawansowanymi metodami, omawianie których wykracza znacznie

Rozwiązanie zadania F 193. Po oświetleniu kulki w wyniku zjawiska fotoelektrycznego zaczną ją opuszczać elektrony i będzie się ona ładować dodatnio. Pod wpływem pola elektrostatycznego kulki coraz więcej elektronów będzie do niej wracać. Ładunek kulki ustali się, gdy w wyniku przyciągania przez kulkę wszystkie elektrony opuszczające ją będą do niej wracać. Wystąpi wówczas stan równowagi dynamicznej. Maksymalna energia kinetyczna elektronów opuszczających kulkę wynosi $E_k = h\nu - W$, gdzie ν jest częstością padającego światła, a h stałą Plancka.

Tuż przy powierzchni kulki elektron ma energię $E = E_k-(1/4\,\pi\varepsilon_0)\cdot eq/r = h\nu - W-(1/4\pi\varepsilon_0)eq/r$, gdzie e — ładunek elementarny, q — ładunek kulki. Jeżeli wszystkie elektrony opuszczające kulkę mają na nią wrócić, to ich maksymalna energia w nieskończoności jest równa zeru. Całkowita energia elektronu po opuszczeniu kulki nie ulega zmianie. Stąd $h\nu - W-(1/4\,\pi\varepsilon_0)eq/r = 0$ i $q = 4\pi\varepsilon_0 r(h\nu - W)/e$.

poza ramy tego artykułu, J. Tunnell w 1983 roku udowodnił twierdzenie pozwalające rozstrzygnąć w skończonej liczbie kroków, czy dana liczba naturalna jest kongruentna, czy nie. Niestety, pewien fragment dowodu tego twierdzenia jest oparty na nieudowodnionej dotąd hipotezie dotyczącej krzywych eliptycznych (tzw. hipoteza B-SD, Bircha i Swinnertona-Dyera). Hipoteza ta została sprawdzona w wielu szczególnych przypadkach i wydaje się bardzo prawdopodobna.

Twierdzenie Tunnella brzmi, jak następuje: Niech n będzie liczbą naturalną nieparzystą i bezkwadratową. Badamy liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z każdego z równań

$$(4) \qquad n = 2x^2+y^2+32z^2 \quad \text{i} \quad n = 2x^2+y^2+8z^2.$$

Jeżeli liczba n jest kongruentna, to drugie równanie (4) ma dwa razy więcej rozwiązań niż pierwsze. Na odwrót, jeżeli drugie z tych równań ma dwa razy więcej rozwiązań niż pierwsze, to liczba n jest kongruentna, o ile wspomniana wyżej hipoteza B-SD zachodzi dla krzywej opisanej równaniem (3).
Analogiczne twierdzenie ma miejsce dla liczb n bezkwadratowych parzystych. Trzeba tylko równania (4) zastąpić przez

$$n = 8x^2+2y^2+64z^2 \quad \text{i} \quad n = 8x^2+2y^2+16z^2.$$

Tak więc korzystając z twierdzenia Tunnella można dowodzić, że pewne liczby naturalne n nie są kongruentne. Natomiast dowód, że liczba n jest kongruentna, powołujący się na to twierdzenie, wymaga jeszcze wykazania, że hipoteza B-SD zachodzi dla odpowiedniej krzywej eliptycznej.

Podamy kilka przykładów. Liczba 3 nie jest kongruentna, ponieważ przy $n = 3$ każde z równań (4) ma cztery rozwiązania w liczbach całkowitych: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = 0$ i oczywiście $4 \neq 2 \cdot 4$. Rozumując podobnie można udowodnić, że również żadna liczba pierwsza postaci $8t+3$ nie jest kongruentna.
Niech liczba n daje przy dzieleniu przez 8 resztę 5 lub 7. Wtedy żadne z równań (4) nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych. Kwadrat dowolnej liczby całkowitej przy dzieleniu przez 8 daje bowiem resztę 0, 1 lub 4. Ponieważ n jest liczbą nieparzystą, więc y jest liczbą nieparzystą i prawa strona każdego z równań (4) przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1 lub 3. Mamy też $0 = 2 \cdot 0$. Wobec tego, jeżeli przyjmiemy hipotezę B-SD, to z twierdzenia Tunnella wynika, że każda liczba naturalna n dająca przy dzieleniu przez 8 resztę 5 lub 7 jest kongruentna.
Analogicznie z hipotezy B-SD można wyprowadzić, że każda liczba n dająca przy dzieleniu przez 8 resztę 6 jest kongruentna.
To, że np. liczba 7 jest kongruentna, można udowodnić bez jakiejkolwiek hipotezy. Wystarczy stwierdzić, że liczby $X = \frac{24}{5}$, $Y = \frac{35}{12}$, $Z = \frac{337}{60}$ spełniają równanie (1) oraz $7 = \frac{1}{2}XY$.
Nie znamy jednak ogólnej metody znajdywania takich liczb X, Y, Z, np. dla liczb n dających resztę 7 przy dzieleniu przez 8.
Podobnie z twierdzenia Tunnella przy założeniu hipotezy B-SD wynika, że liczba 65 jest kongruentna, mimo że daje ona resztę 1 przy dzieleniu przez 8. Wystarczy mianowicie znaleźć wszystkie rozwiązania każdego z równań (4) przy $n = 65$ i porównać ich liczby. Nie przedstawia to większych trudności — wyznaczenie tych rozwiązań pozostawiamy Czytelnikowi jako łatwe ćwiczenie. Natomiast znalezienie trójkąta prostokątnego o długościach boków wymiernych i polu 65 jest zadaniem nieco trudniejszym. Mamy nadzieję jednak, że Czytelnik z nim sobie również poradzi. Udowodni w ten sposób, że liczba 65 jest kongruentna. Fakt ten był znany matematykom arabskim już w X wieku.

Zauważmy na zakończenie, że liczący sobie ponad 1000 lat i mający całkiem elementarne sformułowanie problem znajdywania liczb kongruentnych stanowi drobną ciekawostkę i jest zagadnieniem bez większego znaczenia. Mimo to jego prawie kompletne rozwiązanie wymagało użycia bardzo zaawansowanych metod z różnych działów matematyki wyższej, rozwiniętych dopiero w XX wieku.

Rozwiązanie zadania M 427. Niech p_n, q_n i r_n oznaczają prawdopodobieństwa znalezienia pionka w wierzchołku P, Q i R po n krokach. Jedyna trudność to pokazanie, że ciągi p_n, q_n, i r_n są zbieżne. Przy założeniu zbieżności równość granic jest oczywista. Zatem $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, $r_0 = 0$. Otóż

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n.$$

Istotnie, pionek może trafić do P z Q lub R; jeśli na przykład był w Q, to z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ trafia do P.

Podobnie

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}r_n, \quad r_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}q_n.$$

Stąd $p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - q_n)$, zatem

$$|p_{n+1} - q_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}},$$ co oznacza, że $p_n - q_n \to 0$. Podobnie $p_n - r_n \to 0$.

Mamy więc
$$p_n + q_n + r_n = 1$$
$$p_n - q_n \to 0$$
$$p_n - r_n \to 0.$$

Stąd $3p_n \to 1$, więc $p_n \to \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie zadania P 192. Gdy cząstka znajduje się w środku kuli, nośniki ładunku w przewodniku rozmieszczą się tak, by natężenie pola elektrycznego w jego wnętrzu było równe zeru. Musi być przy tym spełniona zasada zachowania ładunku. Oznacza to, że na powierzchni wydrążenia wyindukuje się ładunek $-q$, a na zewnętrznej powierzchni kuli — ładunek q. Można przyjąć, że otwór w kuli jest na tyle wąski, że jego obecność nie ma wpływu na rozmieszczenie ładunku w przewodniku. Wówczas z symetrii układu wynika równomierny rozkład ładunku na obu powierzchniach. Energia potencjalna cząstki w polu wytworzonym przez nośniki ładunku przewodnika wynosi wówczas $E_{p1} = (1/4\pi\varepsilon_0)q^2(r-R)/Rr$.

Jednocześnie energia potencjalna związana z oddziaływaniem na siebie nośników ładunku w przewodniku wynosi $E_{p2} = (1/8\pi\varepsilon_0)(R-r)q^2/Rr$ (porównaj z identyczną sytuacją w kondensatorze sferycznym). Całkowita energia potencjalna układu wynosi więc $E_p = (1/8\pi\varepsilon_0)q^2(r-R)/rR$. Jeżeli cząstce nadamy prędkość v, to w chwili początkowej energia układu złożonego z cząstki i kuli będzie wynosiła $E = mv^2/2 + (1/8\pi\varepsilon_0)q^2(r-R)/rR$. Gdy cząstka zacznie się poruszać, również nośniki ładunku w kuli zaczną się przegrupowywać. Cząstka po opuszczeniu kuli będzie przez nią przyciągana dzięki odpowiedniemu rozkładowi nośników ładunku. Jeżeli prędkość nadana cząstce jest minimalna, to w nieskończoności będzie ona miała prędkość równą zeru. Równocześnie kula stanie się neutralna w każdym punkcie.

Energia całkowita układu złożonego z kuli i cząstki wyniesie więc wówczas zero. Jeżeli zaniedbamy straty energii związane z wydzielaniem się ciepła podczas przegrupowywania się nośników ładunku w kuli, to energia układu nie ulega zmianie. Zatem $mv^2/2 + (1/8\pi\varepsilon_0)q^2(r-R)/rR = 0$.
Stąd minimalna prędkość jest równa $v = \sqrt{(1/4\pi\varepsilon_0)(R-r)q^2/rRm}$.