

# 5 mata delta

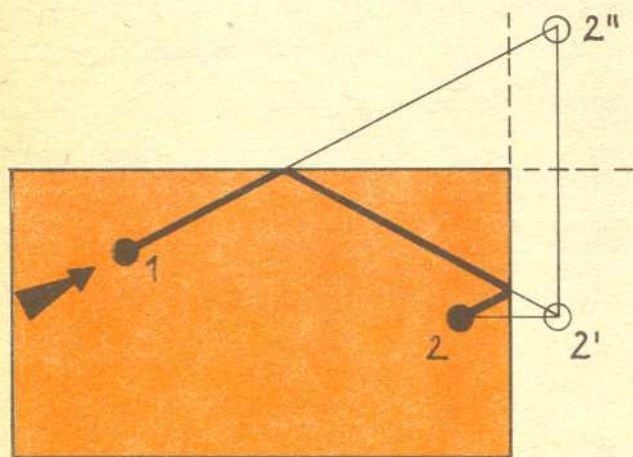
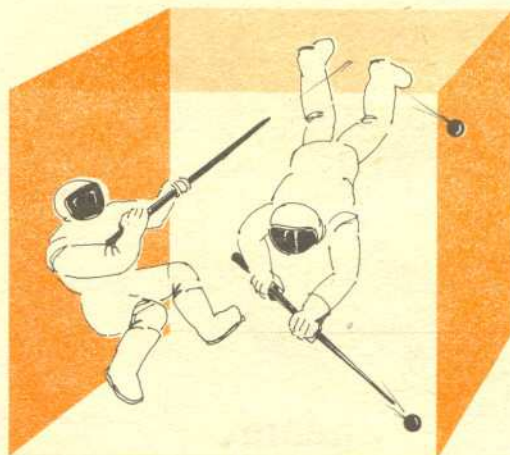
## Jak uderzyć

Bilard to płaski, poziomy stół zaopatrzonego w otaczające go bandy. Każda gra w bilard polega na uderzeniu połączonych na tym stole kul tak, żeby potoczyły się w zamierzony przez nas sposób. Wytrawni gracze umieją uderzać kule tak, że poruszają się one po bilardzie w bardzo skomplikowany sposób i zderzają się też dziwnie — są to efekty wprawiania kul nie tylko w ruch postępowy, ale i nadawania im ruchu obrotowego w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ruchu. My zatrzymajmy się tylko na zwykłym toczeniu kul.

Najprostsze zadanie bilardowe polega na takim uderzeniu kuli, by po jedno-, dwu-, czy trzykrotnym odbiciu się od bandy trafiła w drugą kulę. Jeśli bilard jest prostokątny, to zadanie jest łatwe. Kierunek uderzenia można znaleźć wykreślnie:

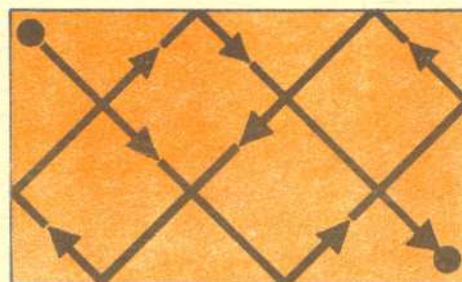
Przykład podany na rysunku pozwoli chyba na wykreślne rozwiązanie dowolnego takiego zadania. Dla uzasadnienia jego poprawności wystarczy chyba następująca uwaga „z fizyki”: gdyby bandy były z luster, należałoby uderzyć w tym kierunku, w którym zobaczymy drugą kulę. Prawda?

Kosmonauci na orbicie (a więc w stanie nieważkości) mogą grać w bilard prostopadłościenny. Muszą oczywiście sami znaleźć się w jego wnętrzu. Czy podana (a raczej zasugerowana) przez nas metoda jest dobra i w tym przypadku?

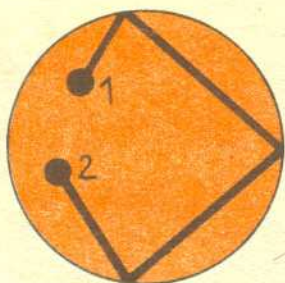


Gdy chcemy znaleźć kierunek uderzenia kuli 1, by odbiła się ona najpierw od „górnej” bandy, potem od „prawej” i trafiła w kulę 2, najpierw znajdujemy 2' — obraz symetryczny 2 względem „prawej” bandy, a potem 2'' — obraz symetryczny 2' względem „górnej” bandy. Kulę 1 należy uderzyć w kierunku 2''.

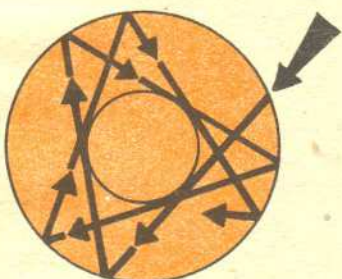
Hugo Steinhaus podaje w „Kalejdoskopie matematycznym”, że jeśli stosunek długości boków prostokątnego bilardu jest liczbą wymierną (np. 5:3), to uderzona pod kątem  $45^\circ$  kula znajdująca się w rogu znów (po pewnej liczbie odbić) trafi do jakiegoś rogu: Czy umielibyście to uzasadnić?



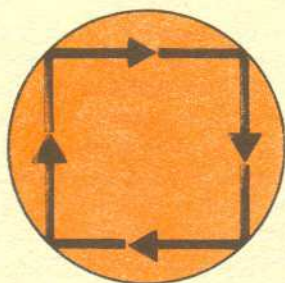
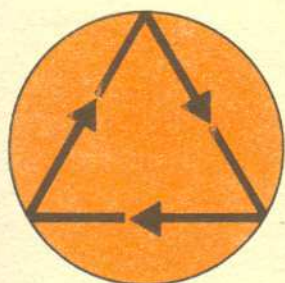
Niech nasz bilard będzie teraz kołem. Otóż, nie wiadomo jak skonstruować kierunek uderzenia kuli, by po (powiedzmy) trzech odbiciach trafiła w drugą kulę. Choć niewątpliwie kierunek taki istnieje.



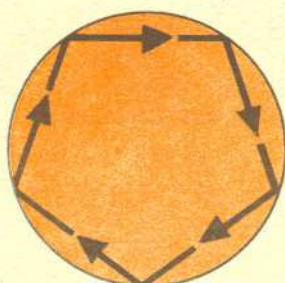
Na kołowym bilardzie dowolnie uderzona kula będzie po cięciwach tej samej długości — dlaczego? Trasę przebytą przez kulę nazywamy jej trajektorią. Trajektoriami dowolnie uderzonej kuli może się w pierścieniu kołowym. Prawda?



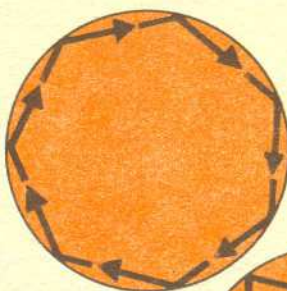
No, nie zawsze. Kula uderzona wzdłuż prostej łączącej ją ze środkiem bilardu będzie stale biegła po średnicy. O takiej trajektorii mówimy, że jest okresowa i ma okres dwa, bo po dwóch odbiciach kula będzie znowu po tej samej drodze. Łatwo wskazać trajektorie o okresie 3 i 4.



Ciekawie się robi, gdy szukamy trajektorii o okresie 5. Od razu widać, że są takie dwie.



Trajektorie o okresie 6 są znowu wszystkie jednakowe. Trajektorii o okresie 7 jest aż 3. Jak ustalić, ile jest trajektorii o dowolnie danym okresie?



Trajektorie mogą też nie być okresowe. Wówczas, gdyby ją „całą” narysować, przechodziłaby dowolnie blisko każdego punktu pierścienia, w którym się mieści. Jak należy uderzyć kulę, żeby poruszała się po trajektorii nieokresowej?

Oczywiście, trajektorii okresowych można szukać i dla innych bilardów niż kołowy. Na rysunku jest przykład trajektorii o okresie 6 dla bilardu prostokątnego. Widać z niego, jak można by szukać innych trajektorii o okresie parzystym. A czy w bilardzie prostokątnym istnieją trajektorie o okresach nieparzystych?

