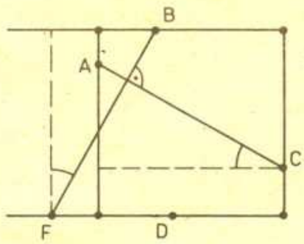
Rozwiązanie zadania M 422. Niech A, B, C, D będą danymi punktami leżącymi na kolejnych bokach szukanego kwadratu. Prowadzimy odcinek BF prostopadły do AC i tej samej długości. Jeżeli punkty D i F są różne, to prosta DF zawiera bok szukanego kwadratu. Rysując prostopadłe do niej przez A i C oraz równoległą przez B otrzymujemy kwadrat, gdyż odległości przeciwległych boków są równe.
W przypadku, gdy $D = F$, bokiem szukanego kwadratu może być każda prosta przechodząca przez D i mająca punkty A, B, C po jednej stronie.



Rok Olimpijski

Po zakończeniu bieżącego roku szkolnego odbędzie się w Warszawie XXVII Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna. Mamy więc w 1986 roku Rok Olimpijski. Olimpiadom poświęcimy cały numer 5/1986. Chcemy jednak i w pozostałych numerach mieć coś olimpijskiego.

W ubiegłorocznej Olimpiadzie Międzynarodowej miażdżący sukces odnieśli zespołowo Rumuni. Indywidualnie komplet punktów zdobył Rumun i Węgier. Dopiero po pewnym odstępie pozostałe zespoły (w tym na „nastym" miejscu Polacy). Taki układ sił nikogo jednak nie zdziwił. Raz, że od kilku lat układ sił jest podobny. Dwa, że wiadomo dlaczego.

W Rumunii i na Węgrzech reprezentację olimpijską trenuje się długo i intensywnie. Nasi zaś zawodnicy to właściwie kompletni amatorzy. Całe przygotowanie reprezentacji to kilkunastodniowe zgrupowanie.

Na czym jednak polega trening? Chyba nie tylko na rozwiązywaniu zadań? Oczywiście rozwiązuje się zadania. Głównym jednak tematem treningu jest wyposażenie zawodników w zestaw „wytrychów" — elementarnych (mniej lub bardziej — ale tzw. szkolnych) twierdzeń „załatwiających" wiele technicznych kłopotów przy rozwiązywaniu zadań. I oczywiście wyćwiczenie rozpoznawania sytuacji, w których ten czy inny „wytrych" daje się zastosować.

Delta nie ma zamiaru kierować przygotowaniem polskiej ekipy na Olimpiadę. Chcemy jednak przedstawić Czytelnikom, o co chodzi. Dlatego w każdym tegorocznym numerze wskażemy jeden „wytrych" i przedstawimy cztery zadania (przeważnie z olimpiad krajowych), do których on pasuje. Zaczynamy od tego numeru.

Kącik olimpijski

Oto zasada znana w matematyce pod nazwą zasady szufladkowej Dirichleta:

Jeżeli rozmieścimy n przedmiotów w m szufladach dla $n > m$, to w pewnej szufladzie znajdą się co najmniej dwa przedmioty.

A w postaci „matematycznej":

Niech A i B będą takimi zbiorami skończonymi, że $|A| > |B|$ ($|A|$ oznacza moc, czyli liczbę elementów zbioru A), a $f: A \to B$ funkcją przekształcającą zbiór A w zbiór B. Istnieją wtedy takie różne elementy $a, b \in A$, że $f(a) = f(b)$.

Niektóre zadania wymagają zastosowania nieco ogólniejszej postaci zasady szufladkowej:

Jeżeli rozmieścimy n przedmiotów w m szufladach i $n > k \cdot m$ dla pewnej liczby naturalnej k, to w pewnej szufladzie znajdzie się więcej niż k przedmiotów.

Jako przykład pokazujący, że ta prościutka zasada może mieć nietrywialne zastosowanie, rozważmy następujące zadanie:

Udowodnić, że z ciągu $a_1, \ldots, a_{101}$ różnych liczb można usunąć 90 tak, by pozostałe 11 tworzyło ciąg monotoniczny.

Rozwiązanie. Przyporządkujmy elementowi a_k liczbę naturalną będącą maksymalną długością ciągu rosnącego, jaki można utworzyć bez zmiany kolejności z elementów $a_1, \ldots, a_k$. Jeśli jakiemuś elementowi przyporządkowaliśmy liczbę większą od 10, to zadanie jest rozwiązane. Jeśli nie, to podzielmy ciąg $a_1, \ldots, a_{101}$ na 10 podciągów zaliczając do i-tego podciągu te liczby, którym przyporządkowano i. Na mocy uogólnionej zasady szufladkowej pewien podciąg ma co najmniej 11 elementów. Podciąg ten jest malejący.

Sformułujemy jeszcze „nieskończoną" postać zasady szufladkowej:

Jeżeli rozmieścimy nieskończenie wiele przedmiotów w skończonej liczbie szuflad, to w pewnej szufladzie znajdzie się nieskończenie wiele przedmiotów.

A oto kilka zadań olimpijskich, przy rozwiązywaniu których stosuje się jedną ze sformułowanych wyżej postaci zasady szufladkowej.

Na sali znajduje się 100 osób, z których każda zna co najmniej 66 spośród pozostałych 99 osób. Dowieść, iż możliwy jest przypadek, że w każdej czwórce tych osób są takie dwie, które się nie znają. Przyjmujemy, że jeżeli osoba A zna osobę B, to również osoba B zna osobę A.
(zadanie 2 z zawodów III stopnia XVIII Olimpiady)

Na sali znajduje się 100 osób, z których każda zna co najmniej 67 innych. Dowieść, że jest na tej sali taka czwórka osób, w której każde dwie osoby się znają. Zakładamy, że jeżeli osoba A zna osobę B, to również osoba B zna osobę A.
(3-III-XVIII)

Niech α będzie liczbą niewymierną, A_1 — punktem okręgu S o środku O. Rozważamy ciąg nieskończony A_n punktów okręgu S, w którym punkt A_{k+1} jest obrazem punktu A_k w obrocie dookoła punktu O o kąt $\alpha \cdot \pi$. Dowieść, że każdy łuk okręgu S zawiera pewne punkty ciągu A_n.
(10-I-XXVI)

Rozstrzygnąć, czy kwadrat K o boku równym 7 można pokryć ośmioma kwadratami o bokach równych 3
a) przy założeniu, że boki tych ośmiu kwadratów są równoległe do boków kwadratu K,
b) bez tego założenia.
(1-II-XXVII)

mgr Jerzy WOJCIECHOWSKI