Klub 44

W lidze matematycznej niewiele nowego. Rzecz jasna, zmieniają się liczby — uczestników ligi jest już dobrze ponad trzy setki, liczba członków **Klubu 44** zbliża się do czterdziestki (ciekawe, kto będzie czterdziestym czwartym). Jak co roku w styczniu jest sposobność do obejrzenia obszernej tabeli ligowej. Każdy, kto był dostatecznie wytrwały, znajdzie na niej swe nazwisko.

Wszystkich, oczywiście, interesują własne wyniki w rozwiązywaniu poszczególnych zadań. Jak poznać swe oceny? Nic prostszego: należy — a tę formę proponowaliśmy już w omówieniu ligi przed dwoma laty — należy więc przysłać nam kartkę pocztową, ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką, z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Tę samą formę informacji proponujemy też uczestnikom ligi fizycznej, prosimy jedynie, gdy ktoś uczestniczy w obu konkurencjach, o przysyłanie oddzielnej „karty informacyjnej" dla **M** i **F**. I w ogóle — wszelką korespondencję (rozwiązania zadań, propozycje zadań, uwagi, komentarze) dotyczącą ligi matematycznej i dotyczącą ligi fizycznej bardzo prosimy przysyłać w oddzielnych kopertach.

Teraz tradycyjne styczniowe omówienie zadań ligowych. Jak zwykle, znajdą się w nim te zadania, które przez nielicznych tylko uczestników zostały rozwiązane poprawnie (lub z niewielkimi tylko lukami) oraz te, dla których uczestnicy konkursu podali rozwiązania istotnie różne od naszych rozwiązań — bardziej eleganckie lub ogólniejsze. Brak komentarza przy informacji o rozwiązaniu oznacza, że jest ono zasadniczo zgodne z rozwiązaniem podanym przez nas.

Zadanie 89 [Płaski przekrój sześcianu o maksymalnym polu] (WT = 3,67) zostało rozwiązane przez czterech uczestników; tylko S. Solecki i T. Rawlik zauważyli, że zadanie redukuje się do wcześniejszego zadania 76 (które zresztą z tą myślą zostało w konkursie ligowym umieszczone); M. Gałecki i Z. Koza przysłali uciążliwe rozwiązania rachunkowe, nie wolne od usterek.

Zadanie 91 [Dany ciąg $Ł_0, Ł_1, \ldots$ łamanych zamkniętych, kolejne wierzchołki $Ł_{n+1}$ to środki kolejnych boków $Ł_n \Rightarrow \lim|Ł_n| = 0$] (WT = 3,76) rozwiązali poprawnie tylko J. Janowicz, P. Kamiński, T. Komorowski; ich rozwiązania są różne od naszego i opierają się (u pierwszych dwóch z wymienionych autorów; u trzeciego trochę inaczej, choć podobnie) na spostrzeżeniu, że gdy przez $P_{n,i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ oznaczamy kolejne wierzchołki łamanej $Ł_n$, a przez O środek ciężkości wszystkich tych łamanych, to zachodzi równość wektorowa

$OP_{n,i} = 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} OP_{0,i+j}$ (dodawanie $i+j$ modulo m), prowadząca do

oszacowania $M_{km} \leqslant M_0\left(1 - \frac{m}{2^{m-1}}\right)^k$, gdzie $M_n = \max(OP_{n,1}, \ldots, OP_{n,m})$, skąd teza.

Zadanie 93 [Ułamek $m/n \in (0,1)$ przedstawić jako sumę odwrotności $\leqslant n-1$ różnych liczb naturalnych] (WT = 2,94) ma rozwiązanie znacznie prostsze od podanego przez nas: w wyniku stosowania algorytmu przedstawionego na rysunku 1 otrzymujemy ciągi liczb naturalnych

$$m = m_0 > m_1 > \ldots > m_{s-1} > m_s = 0 \text{ (stąd } s \leqslant m)$$
$$n = n_0 < n_1 < \ldots < n_{s-1} < n_s$$
$$1 < k_0 < k_1 < \ldots < k_{s-1}$$

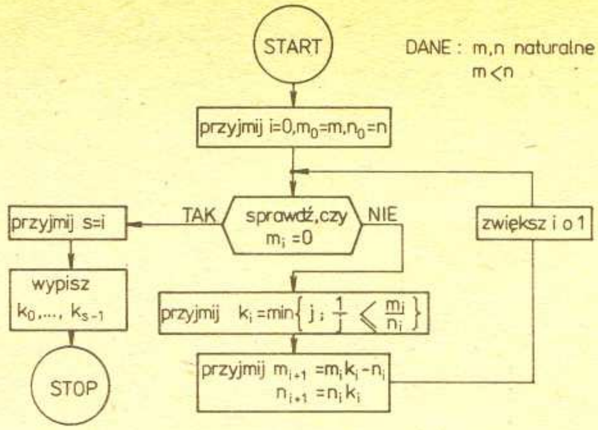
(sprawdzenie nierówności nietrudne); przy tym

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{k_0} + \frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \frac{m_2}{n_2} = \ldots = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_{s-1}}.$$

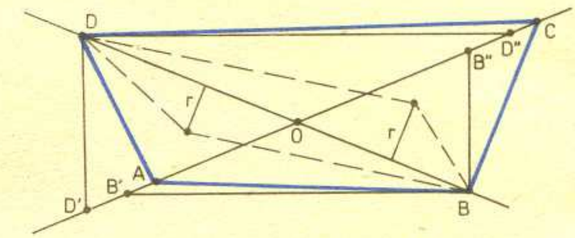
Rozwiązanie to (w postaciach nieznacznie różniących się) podali M. Gałecki, P. Kamiński, T. Komorowski, Z. Koza, R. Mazurek, M. Mikucki, A. Pawłowski, D. Sowizdrzał, T. Szymczyk, A. Wyrwa. Również poprawne, ale mniej proste, rozwiązania oparte na rozwinięciach dwójkowych podali J. Janowicz, J. Mańdziuk, E. Orzechowski, T. Rawlik.

Zadanie 94 [Dane półproste $\overrightarrow{OP_i}$, $i \leqslant n$, $\sum|\sphericalangle P_iOP_{i+1}| < 360° \Rightarrow$ istnieje półprzestrzeń zawierająca te półproste] (WT = 3,76) zostało rozwiązane poprawnie przez trzech uczestników; T. Komorowski i A. Bonk podali to samo rozwiązanie, co *Delta*; M. Gałecki — rozwiązanie bardziej skomplikowane; przysłano jeszcze kilka rozwiązań z bardzo istotnymi lukami.

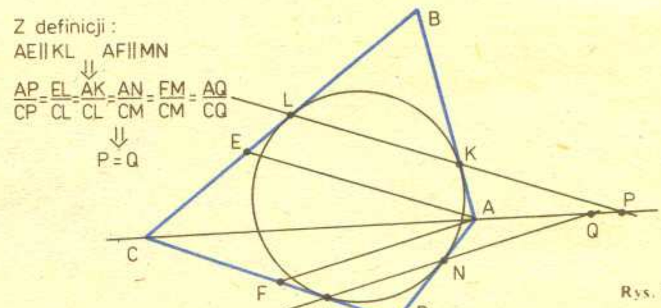
Zadanie 98 [$x_1 = 1$, $x_{n+1} = (\sqrt{1+x_n^2}-1)/x_n$; $\lim 2^n x_n = ?$] (WT = 2,94). Siedemnaście dobrych rozwiązań, w większości nie odwołujących się do interpretacji geometrycznej, tylko korzystających ze wzoru na tangens $x/2$.



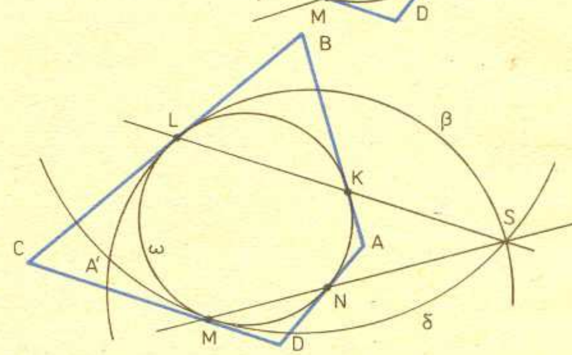
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zadanie 100 [Dwa koła współśrodkowe podzielone na 100 sektorów, 51 czerwonych, 49 niebieskich $\Rightarrow$ istnieje obrót dający $\geqslant 52$ „nałożeń zgodnych" (czerwone na czerwone, niebieskie na niebieskie)] (WT = 2,92). Dwadzieścia rozwiązań poprawnych. Oto najbardziej eleganckie (J. Cisło): Przyjmijmy pewne położenie kół za „zerowe" i ponumerujmy sektory zgodnie liczbami od 1 do 100. Dla $i \in \{1, \ldots, 100\}$ niech $x_i = 1$, gdy i-ty sektor pierwszego koła jest czerwony, $x_i = -1$, gdy niebieski, $y_i = 1$, gdy i-ty sektor drugiego koła est czerwony, $y_i = -1$, gdy niebieski. Przyjmijmy $z_k = \sum x_i y_{i+k}$ (dodawanie $i+k$ modulo 100). Wystarczy pokazać, że $z_k \geqslant 4$ dla pewnego k (bo wówczas w sumie 100 składników, definiującej z_k, musi być $\geqslant 52$ składników równych $+1$). Nietrudno dowieść, że każde z_k dzieli się przez 4, a ponieważ $\sum z_k = (\sum x_i)(\sum y_i) = 2 \cdot 2 = 4$, więc istnieje $z_k \geqslant 4$.

Zadanie 101 [W czworokącie wypukłym $ABCD$ koła wpisane w trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB mają równe promienie $\Rightarrow ABCD$ jest prostokątem] (WT = 3,24). Czternaście dobrych rozwiązań. Wyróżnić trzeba pomysł P. Figurnego:

$$\left.\begin{aligned} S_{ABC} + S_{CDA} &= (r/2)(AB+BC+CA+CD+DA+AC) \\ S_{BCD} + S_{DAB} &= (r/2)(BC+CD+DB+DA+AB+BD) \end{aligned}\right\} \Rightarrow AC = BD.$$

Można założyć, że z czterech odległości OA, OB, OC, OD najmniejsza jest OA, wówczas największa jest OC. Niech $OB' = OB'' = OB$, $OD' = OD'' = OD$ (rysunek 2):

$$(*) \qquad \begin{aligned} |\sphericalangle ABD| &\leqslant |\sphericalangle B'BD| = |\sphericalangle D''DB| \leqslant |\sphericalangle CDB| \\ |\sphericalangle BDA| &\leqslant |\sphericalangle BDD'| = |\sphericalangle DBB''| \leqslant |\sphericalangle DBC| \end{aligned}$$

Z trójkątów DAB i BCD mamy dalej

$$BD = r\left(\operatorname{ctg}\frac{ABD}{2} + \operatorname{ctg}\frac{BDA}{2}\right) = r\left(\operatorname{ctg}\frac{CDB}{2} + \operatorname{ctg}\frac{DBC}{2}\right).$$

Wobec nierówności (*) ostatnia równość zachodzić może tylko wtedy, gdy nierówności (*) są wszystkie równościami, a to ma miejsce tylko wtedy, gdy $OA = OB = OC = OD$, czyli gdy $ABCD$ jest prostokątem. Typowym błędem było w wielu pracach korzystanie z (nieprawdziwej) „cechy przystawania trójkątów": równość dwóch boków i promieni kół wpisanych.

Zadanie 107 [Czworokąt $ABCD$ opisany na kole $\Rightarrow$ proste KL, MN, AC (rys. 3) mają wspólny punkt lub są równoległe] (WT = 2,57). Czternaście poprawnych rozwiązań; dużo ciekawych metod (tw. Menelausa, tw. Pascala o stożkowych, rzut środkowy, trygonometria). Prostotą wyróżnia się rozwiązanie przedstawione na rysunku 3 (W. Boratyński, D. Kowalczyk, a dość podobnie T. Rawlik, K. Witek), oryginalnością zaś — rozwiązanie następujące (M. Mazur). Niech $\{S\} = prKL \cap prMN$ (przypadek $KL \parallel MN$ pomijamy jako trywialny) i niech f będzie inwersją o środku S i potędze $SK \cdot SL = SM \cdot SN$. Okrąg ω wpisany w czworokąt $ABCD$ zawiera punkty K, L, M, N (rysunek 4). Ponieważ $f(K) = L$, $f(L) = K$, $f(M) = N$, $f(N) = M$, więc $f(\omega) = \omega$. Proste AB i AD styczne do ω w punktach K i N, uzupełnione punktem w nieskończoności, przejdą na okręgi β i δ styczne do ω w punktach L i M, przy czym $\beta \cap \delta = \{S, A'\}$, gdzie $A' = f(A)$. Punkt C ma równą potęgę względem okręgu β i okręgu δ $(CL^2 = CM^2)$, więc należy do prostej potęgowej pary okręgów β, δ, czyli do prostej SA'. Stąd i ze współliniowości punktów S, A, A' wynika współliniowość S, A, C.

Zadanie 108 [$x_n = (x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3})/3$, x_1, x_2, x_3 dane; uzasadnić istnienie i obliczyć $\lim x_n$] (WT = 2,42). Siedemnaście rozwiązań poprawnych. Tylko dowód istnienia granicy sprawiał kłopot. Oto jak sobie z tym poradził P. Figurny. Niech M będzie stałą taką, że $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M(3/4)^n$ dla $n = 1, 2, 3$; wówczas nierówność ta zachodzi już dla wszystkich n — dowód indukcyjny:

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{3}|x_{n-2} + x_{n-1} - 2x_n| \leqslant \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}| + \frac{1}{3}|x_n - x_{n-2}| =$$

$$= \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}| + \frac{1}{9}|x_{n-3} + x_{n-1} - 2x_{n-2}| \leqslant \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}| +$$

$$+ \frac{1}{9}|x_{n-1} - x_{n-2}| + \frac{1}{9}|x_{n-2} - x_{n-3}| \leqslant \frac{1}{3}M\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{9}M\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \frac{1}{9}M\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} < M\left(\frac{3}{4}\right)^{n};$$

z tej nierówności łatwo dostać warunek Cauchy'ego dla ciągu (x_n).
Pięciu autorów (J. Cisło, M. Gałecki, P. Jędrzejewicz, Z. Koza, D. Kurpiel) podaje uogólnienie na przypadek ciągu $x_n = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{n-i}$ ($x_1, \ldots, x_k$ dane);

wynik: $\lim x_n = \left(\sum_{i=1}^{k} i x_i\right) / \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)$.

Możemy już dokonać krótkiego podsumowania pierwszych pięciu miesięcy funkcjonowania ligi zadaniowej z fizyki. Sądząc po liczbie rozwiązań, które wpłynęły po ukazaniu się pierwszych zadań, nowa konkurencja została przyjęta z dużym zainteresowaniem. Po dobrym starcie następne miesiące przyniosły jednak spadek liczby prac. Tłumaczymy to zbliżaniem się gorącego okresu matur i egzaminów: ponad połowa z 77 dotychczasowych uczestników (wśród nich trzy panie) to uczniowie i studenci, ze zdecydowaną przewagą uczniów, głównie z klas maturalnych.

Dalej zamieszczamy pierwszą listę uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 F**. Pięcioro uczestników ligi fizycznej jest już członkami matematycznego **Klubu 44**, większość jednak nie próbowała dotychczas swych sił w konkurencji matematycznej.

Wytrwałych, którzy nadesłali rozwiązania wszystkich dziesięciu zadań, jest zaledwie pięciu. Może więc zadania były za trudne? Od przerwy wakacyjnej częściej już pojawiają się zadania łatwiejsze. Chętnie widzimy wszelkie uwagi na ich temat oraz — jak zawsze — propozycje zadań.

Liczba zadań z fizyki do omówienia jest znacznie skromniejsza, aniżeli z matematyki. Ponieważ czynimy to po raz pierwszy, najpierw parę uwag ogólnych. Jak podaliśmy przed rokiem, do rozwiązania zadań ligi zasadniczo wystarcza zasób wiadomości szkolnych z matematyki i fizyki. Chociaż niektóre zadania zakładają (i stymulują zarazem) pewne rozszerzenie wiedzy w stosunku do podręczników szkolnych, to jednak do ich rozwiązania wystarcza aparat pojęciowy i matematyczny, w jaki wyposaża szkoła średnia (np. liceum ogólnokształcące o profilu matematyczno-fizycznym). Uważamy zatem, że stosowanie na przykład zaawansowanych metod mechaniki teoretycznej bądź złożonych równań różniczkowych do zadania dającego się rozwiązać znacznie prostszymi metodami jest uchybieniem przeciw elegancji, która — zgodnie z regulaminem ligi — liczy się przy ocenie rozwiązania. A teraz omówienie wybranych zadań:

Zadanie 1 [Opór zastępczy przerwanej sieci oporów] (WT = 2,19). Większość uczestników rozwiązała zadanie poprawnie. Decydująca okazała się znajomość (lub wymyślenie) sposobu, który podaliśmy w naszym rozwiązaniu (numer 5/1985). Wielu Czytelników znało ten sposób ze zbiorów zadań z Olimpiad Fizycznych.

Zadanie 2 [Powstawanie dźwięku w „grającej rurze"] (WT = 3,23). Znaczna część rozwiązujących słusznie zauważyła, że przepływ powietrza w wirującej rurze powodowany jest przez siłę odśrodkową. Podane w rozwiązaniu, wydrukowanym w numerze 5/1985, zjawisko Bernoulliego odgrywa tu — jak wykazały przeprowadzone doświadczenia — mniejszą rolę.

Zadanie 3 [Upadanie pręta podpartego na gładkim, poziomym podłożu] (WT = 2,83).
Sporo osób rozwiązywało to zadanie korzystając z zasady zachowania energii. Tą metodą stosunkowo łatwo uzyskuje się wzór na prędkość kątową pręta

$$\omega = \sqrt{\frac{12(1-\cos\alpha)}{1+3\sin^2\alpha}\,\frac{g}{l}},$$

dalej oblicza się przyspieszenie kątowe pręta jako $\varepsilon = \omega\frac{d\omega}{d\alpha}$. Niewielu uczestników (niezależnie od metody) przebrnęło do końca przez wszystkie rachunki bez popełnienia błędu. Cóż, kiedy przykry błąd trafił się nawet w rozwiązaniu, które wydrukowaliśmy w numerze 6/1985: związek (4) powinien mieć postać:

$$a = \frac{l}{2}(\varepsilon\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha),$$

odpowiednio do tego

$$\varepsilon = \frac{6\sin\alpha[1+3(1-\cos\alpha)^2]}{(1+3\sin^2\alpha)^2}\,\frac{g}{l}.$$

Szczególnie starannie zostało to zadanie rozwiązane przez pana Dz. Lipniackiego.

Zadanie 7 [Ruch poślizgowo-obrotowy obręczy po poziomym podłożu] (WT = 2,30).
Większość rozwiązujących to zadanie starała się, z różnym powodzeniem, uwzględnić tarcie toczne. Tymczasem przy zaniedbaniu tego tarcia rachunki są dużo prostsze. Treść zadania — podobnie jak i niektórych innych — pozostawiała wybór sensownych założeń samym uczestnikom.

Zadanie 8 [Zjawisko aureoli na rosie] (WT = 3,50). Wśród rozwiązań tylko jedno całkiem poprawne wyjaśnienie, nadesłał je pan P. Bała.

Zadanie 9 [Ciśnienie pary nasyconej nad roztworem] (WT = 2,39). W zadaniu chodziło o możliwie elementarne wyprowadzenie tzw. prawa Raoulta. Podanie gotowej zależności, bez jej wyprowadzenia, nie było więc traktowane jako satysfakcjonujące rozwiązanie.

Zadanie 10 [Orbita rakiety wysłanej na bliźniaczą planetę] (WT = 3,10). Jedyne dwa dobre rozwiązania nadesłali P. Bała i Dz. Lipniacki. Pan Bała zauważył, że podróż po orbicie półrocznej wymaga nadania rakiecie większej prędkości startowej względem Ziemi (w kierunku przeciwnym do ruchu Ziemi po orbicie wokółsłonecznej), aniżeli wynosi wymagana prędkość startowa (w kierunku zgodnym z ruchem Ziemi) dla orbity półtorarocznej; ta ostatnia orbita, o dużej półosi $1{,}31a_z$ i odległości od Słońca w aphelium $1{,}62a_z$ (a_z — średnia odległość Ziemia-Słońce) jest więc orbitą wymagającą najmniejszego zużycia paliwa. Pan Lipniacki postarał się nawet — co było całkiem poza oczekiwaniami — obliczyć orientacyjną masę startową rakiety, niestety, popełnił pomyłkę przy uwzględnianiu prędkości ucieczki z Ziemi.

Za rok — kolejne omówienie i obszerna czołówka ligi matematycznej i fizycznej.

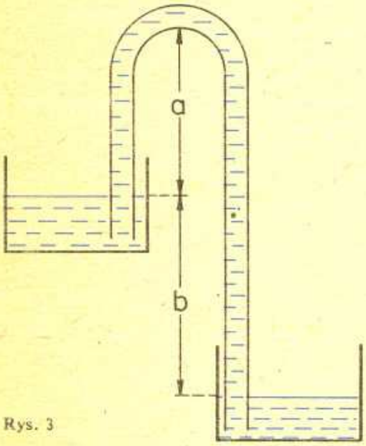
Pierwsza lista uczestników ligi zadaniowej „Klub 44"F

(na podstawie ocen rozwiązań zadań z numerów 1-5/1985)

Piotr Bała	— Toruń	23,20
Dzierżysław Lipniacki	— Lublin	18,82
Tomasz Rawlik	— Gliwice	12,69
Maciej Stasiak	— Człuchów	12,15
Wiesław Stochmal	— Szczecin	11,88
Zbigniew Lipowczan	— Katowice	11,81
Piotr Dziembaj	— Kraków	10,05
Maciej Krzyżanowski	— Lublin	8,58
Paweł Rogocz	— Legnica	8,39
Aleksander Surma	— Myszków	8,09
Marek Kirejczyk	— Warszawa	7,39
M. Tasak	— Poznań	6,74
Mariusz Surma	— Kielce	6,55
Artur Sierant	— Człuchów	6,28
Rafał Sosna	— Warszawa	6,28

Zestawienie obejmuje nazwiska wszystkich uczestników, którzy w klasyfikacji ligowej uzyskali co najmniej 6 punktów.

Współczynniki trudności zadań:
1—2,19 2—3,23 3—2,83 4—3,03 5—1,91
6—2,64 7—2,30 8—3,50 9—2,39 10—3,10



Rys. 3

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1986

Zadania z matematyki nr 123, 124

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

123. Rozwiązać (w liczbach rzeczywistych x) równanie

$$\left(a^2x+\frac{b^2}{x}\right)\sqrt{1+(x-c)^2} = 2ab;$$

a, b, c są danymi liczbami dodatnimi.

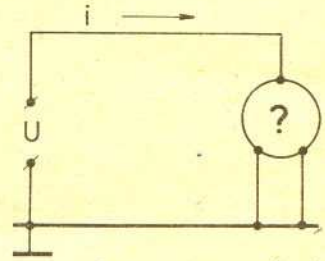
124. Na płaszczyźnie dane są wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ mające długość 1. Wykazać, że co najmniej jeden z wektorów $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ ma długość mniejszą lub równą 1.

Zadanie **124** przysłał pan Werner Mnich z Opola.

Zadania z fizyki nr 21, 22

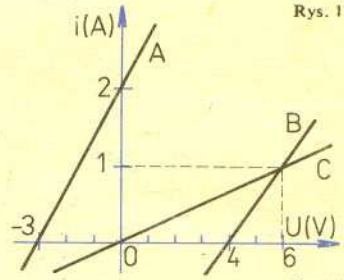
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

21. Dana jest elektryczna „czarna skrzynka", zawierająca nieznany obwód, z trzema zaciskami A, B, C. Posługując się układem pokazanym na rysunku 1 wyznaczono zależność natężenia prądu i od przyłożonego z zewnątrz napięcia U dla trzech kombinacji zacisków. Zależności te (charakterystyki prądowo-napięciowe) są przedstawione na rysunku 2. Dodatni kierunek prądu określa strzałka na rysunku 1, a symbol przy każdej z charakterystyk odpowiada symbolowi zacisku, który w danym przypadku połączony był ze źródłem napięcia (dwa pozostałe połączone z masą). Podać najprostszy możliwy układ elektryczny „czarnej skrzynki" i określić parametry jego elementów.



Rys. 1

22. Rysunek 3 przedstawia schematycznie lewar używany do przelewania cieczy między naczyniami o różnych poziomach. Jakie czynniki, poza ciśnieniem atmosferycznym, warunkują maksymalną wysokość a wzniesienia cieczy w lewarze nad poziom górnego naczynia? Wyznaczyć maksymalną wysokość a dla dwóch skrajnych przypadków: (1) gdy $b \ll a$ oraz (2) gdy $b \gg a$. Należy przy tym przyjąć, że rurka lewarka ma na całej długości jednakową średnicę, że długość wygiętego łukowo odcinka lewara jest mała w porównaniu z a oraz że ciecz jest czysta (jednoskładnikowa i nie zawiera rozpuszczonych gazów).



Rys. 2

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs — ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.
2. Liga ma charakter ciągły. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po 4 zadania w każdym numerze: 2 z matematyki i 2 z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przesyłaniu opracowanych rozwiązań do Redakcji *Delty*. Aby zostać uczestnikiem, wystarczy przesłać rozwiązanie choćby jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zdań z każdego miesiąca.
6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12, np. termin nadsyłania rozwiązań zadań z nr 11/1986 upływa 31 stycznia 1987). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.
7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru i podpisane. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci — roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie:

   Klub 44 M lub **Klub 44 F**.
8. Prace powinny być samodzielne. Serie rozwiązań jednobrzmiących nie będą brane pod uwagę.
9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Przy ocenie jest brana pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.
10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po upływie terminu nadsyłania rozwiązań. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 ustalaną według następującej zasady: jeżeli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru, w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4-3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).
11. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań (obliczone według podanej wyżej zasady) są sumowane, oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.
12. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.
13. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.
14. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*.
15. Członkowie **Klubu 44** będą zapraszani na spotkania **Klubu 44**, które będą organizowane w Warszawie raz do roku.
16. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian Regulaminu.

Lista uczestników ligi zadaniowej „Klub 44" M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 111 (WT=3,60) i 112 (WT=1,16)

Anna Gluza	— Toruń	45,09
Jacek Mańdziuk	— Lublin	42,93
Andrzej Sudoł	— Nowy Sącz	41,68
Marian Roman	— Ełk	1—41,28
Andrzej Pawłowski	— Zabrze	2—40,07
Grzegorz Kuś	— Kraków	39,93
Jerzy Janowicz	— Bolesławiec	4—35,45
Zbigniew Zaus	— Kraków	34,91
Wojciech Krzyżański	— Żywiec	34,45
Andrzej Bonk	— Chełmża	33,79
Jerzy Tyszkiewicz	— Warszawa	33,28
Wojciech Boratyński	— Warszawa	33,06
Marek Prauza	— Poraj	1—32,72
Mariusz Łopusiewicz	— Legnica	32,15
Krzysztof Jakubczak	— Kudowa Zd.	31,00
Zbigniew Koza	— Jelenia G.	1—30,70
Dariusz Kurpiel	— Zarszyn	30,57
Henryk Mikołajczak	— Wałbrzych	30,39
Zygmunt Bartkowski	— Warszawa	29,95
Władysław Wasiak	— Toruń	28,92
Michał Marczak	— Radom	28,86
Dariusz Sowizdrzał	— Szczecin	2—28,47
Jarosław Kaczyński	— Starogard Gd.	28,31
Jacek Uryga	— Bytom	3—27,93
Maciej Głuszek	— Wrocław	27,85
Mirosław Mikucki	— Augustów	27,60
Janusz Prajs	— Opole	27,57
Stanisław Dorosz	— Kraków	26,60
Artur Smolczyk	— Tarnów Op.	1—25,15
Krzysztof Zygan	— Lubin	24,98
Adam Stadler	— Rzeszów	24,94
Zbigniew Kryłow	— Sopot	24,93
Tomasz Masłowski	— Toruń	24,40
Krzysztof Trautman	— Warszawa	1—24,31
Edward Orzechowski	— Warszawa	2—23,58
Tomasz Rawlik	— Gliwice	2—23,53
Adam Wyrwa	— N. Wiśnicz	1—23,43
Krzysztof Jedziniak	— Katowice	1—23,24
Lech Bartłomiejczyk	— Gliwice	22,50
Mirosław Matlęga	— Skoczów	22,27
Marek Gałecki	— Milanówek	4—21,44
Radosław Zapert	— Kielce	21,11
Jerzy Cisło	— Wrocław	20,62
Małgorzata Czerniakowska	— Gdańsk	1—20,54
Kazimierz Serbin	— Sanok	1—20,28
Piotr Jędrzejewicz	— Toruń	19,38
Piotr Figurny	— Lubartów	1—19,34
Dzierżysław Lipniacki	— Lublin	18,15
Karol Jachacy	— Tłuszcz	17,25
Dezsö Gross	— Budapeszt	17,12
Robert Mitraszewski	— Wrocław	16,79
Jacek Jakubiak	— Łódź	16,30
Ryszard Pagacz	— Zawadzkie	2—11,06
Zbigniew Bartold	— Gdynia	2— 6,50
Paweł Kamiński	— Warszawa	4— 5,73
Tomasz Komorowski	— Świdnik	2— 2,12

Legenda (przykładowo): stan konta 4-35,45 oznacza, że uczestnik już czterokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (piątej) rundzie ma już 35,45 pkt.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 16 punktów, a także czterech mających aktualnie mniej na koncie, ale będących już co najmniej dwukrotnymi członkami Klubu 44.

Pozostali członkowie Klubu 44 (alfabetycznie): Biegański, Ciach, Fiszer, Józefczyk, Małopolski, Mazur, Mazurek, Mikuta, Milczarek, Olszewski, Siwy, Solecki, T. Szymczyk, W. Szymczyk, Witek.

Rozwiązania zadań z numeru 9/1985

115. Niech $a > 0$ będzie pierwiastkiem równania $x^2-x-1=0$. Dowieść, że $[a^2n] = [a[an]]+1$ dla $n = 1,2,3,\ldots$.

116. Czy wykresy funkcji $y = a^x$ i $y = b^x$ są figurami podobnymi? ($a, b > 0$, $1 \neq a \neq b \neq 1$).

115. Oznaczmy $[an] = m$; wówczas $[a^2n] = [(a+1)n] = m+n$. Należy więc dowieść, że $m+n = [am]+1$. Równoważnym zapisem tej tezy jest pierwsza z napisanych poniżej nierówności podwójnych, a dalej każda następna nierówność jest równoważna poprzedniej:

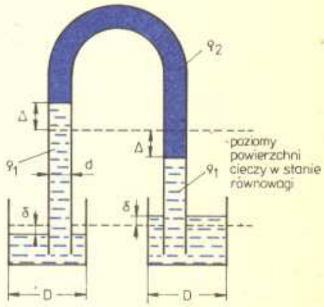
$$n-1 \leqslant am-m < n,$$
$$a(n-1) \leqslant (a^2-a)m < an,$$
$$an-a \leqslant m < an,$$
$$[an] < an \leqslant [an]+a.$$

Prawdziwość ostatniej nierówności wynika z niewymierności a i z tego, że $a > 1$.

116. Można ograniczyć uwagę do przypadku, gdy $a, b > 1$ (bo wykresy funkcji wykładniczych o podstawach a i $1/a$ są symetryczne). Znajdziemy liczby $c < 0$ i $k > 0$ takie, że jednokładność o środku w punkcie $(c, 0)$ i o skali k przeprowadza zbiór $A = \{(x, y) : y = a^x\}$ na zbiór $B = \{(x, y) : y = b^x\}$. Jednokładność o środku $(c, 0)$ i skali k jest dana wzorem $J(x, y) = (c+k(x-c), ky)$. Chcemy, by $J(A) = B$; ma więc zachodzić równoważność: $y = a^x \Leftrightarrow ky = b^{c+k(x-c)}$. W tym celu wystarczy, żeby tożsamościowo była spełniona równość $ka^x = b^{c-kc}b^{kx}$, a to zachodzi dla $k = \log_b a$, $c = (1-k)^{-1}\log_b k$.

13. Czy układ przedstawiony na rysunku, w którym gęstość cieczy ϱ_2 jest większa od gęstości cieczy ϱ_1, może pozostawać w równowadze trwałej? Jeśli tak, jaki warunek musi być spełniony? Jeżeli zaś nie, to dlaczego?

14. Oszacować co do rzędu wielkości stosunek mocy promieniowania widzialnego padającego na dobrze oświetloną powierzchnię do mocy padającego na tę powierzchnię zrównoważonego promieniowania termicznego odpowiadającego temperaturze pokojowej. Ocenić, jakiego rzędu wielkości jest energia promieniowania zawarta w przestrzeni średniej wielkości pokoju. Niezbędne dane należy przyjąć samemu lub wziąć z tablic (żarówka elektryczna emituje w postaci promieniowania widzialnego około 1/30 mocy wydzielanej).



13. Aby stwierdzić, czy stan symetrycznego układu cieczy w obu ramionach jest stanem równowagi trwałej, rozważymy sytuację po niewielkim przemieszczeniu słupa cieczy w rurce o Δ — jak na rysunku — któremu odpowiada przesunięcie poziomu cieczy w każdym z naczyń o

$$\delta = \frac{d^2}{D^2-d^2}\Delta.$$

Na skutek zmian poziomów cieczy pojawia się pewne niezrównoważone parcie hydrostatyczne działające na ciecz w rurce (można sobie wyobrazić, że działa ono na powierzchnię rozgraniczającą dwie ciecze). Wartość tego parcia wynosi

$$P = \frac{\pi}{4}d^2 g[\varrho_1 2\delta-(\varrho_2-\varrho_1)2\Delta],\text{ gdzie g — przyspieszenie ziemskie.}$$

Dodatni znak P przy dodatnim Δ odpowiada dążeniu do przywrócenia stanu równowagi. Stąd wyprowadzamy poszukiwany warunek: $\dfrac{\varrho_2}{\varrho_1} < \dfrac{D^2}{D^2-d^2}$.
Gdy jest on spełniony, układ może znajdować się w równowadze trwałej.

14. Obliczamy przykładowo gęstość strumienia promieniowania widzialnego 60-watowej żarówki, padającego prostopadle na powierzchnię odległą o 0,4 m, jako 1 W/m². W przypadku zrównoważonego promieniowania termicznego — jakie panuje we wnęce o jednorodnej temperaturze ścian — na dowolny element o jednostkowej powierzchni pada taki sam strumień energii, jaki byłby emitowany przez jednostkę powierzchni ciała doskonale czarnego o tej samej temperaturze. Gęstość tego strumienia energii, określona wzorem Stefana-Boltzmanna, jest równa σT^4 ($\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}$ W/m²K⁴, T — temperatura bezwzględna) i dla $T = 293$ K wynosi 420 W/m² (jest to w przybliżeniu połowa gęstości strumienia energii promieniowania słonecznego padającego w warunkach pełnego nasłonecznienia!). Można więc stwierdzić, że stosunek mocy promieniowania widzialnego do promieniowania termicznego jest rzędu $10^{-3}-10^{-2}$. Aby ocenić wartość energii zrównoważonego promieniowania termicznego zawartego w pewnej przestrzeni, spójrzmy na to promieniowanie jako na zbiór fotonów poruszających się z prędkością światła c = $3\cdot 10^8$ m/s. Rozpatrując wnękę sześcienną przy upraszczającym założeniu, że wszystkie fotony poruszają się tylko w kierunkach równoległych do krawędzi sześcianu, otrzymujemy na gęstość energii promieniowania wzór $6\sigma T^4/c$ (dokładny wzór ma postać $4\sigma T^4/c$). Stąd obliczamy, że energia promieniowania termicznego w przestrzeni pokoju o objętości około 30 m³ jest rzędu 10^{-4} J. Energia zawartego w tej przestrzeni promieniowania widzialnego jest w normalnych warunkach znacznie mniejsza.