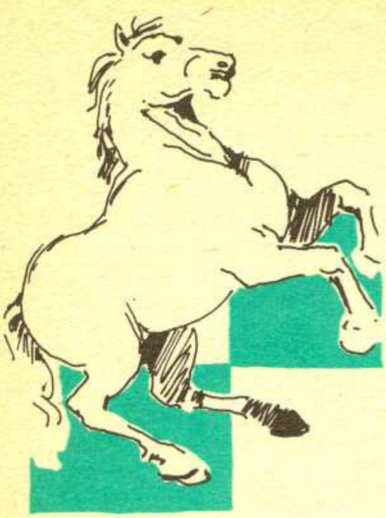

Opis ruchu za pomocą alternatywnej teorii mnogości

Dr Wiesław NAGÓRKO, prof. dr Czesław WOŹNIAK

Gdy w jakiejś teorii matematycznej znana już jest dostateczna liczba definicji oraz dostateczna liczba twierdzeń, przystępuje się zwykle do analizy polegającej na wyodrębnieniu terminów, których nie trzeba definiować, bo „wiemy, co one oznaczają" oraz twierdzeń, których nie trzeba dowodzić, bo są „oczywiste", jedne i drugie zaś wystarczą do udowodnienia wszystkich pozostałych twierdzeń teorii. Tak wyodrębnione terminy nazywa się pojęciami pierwotnymi, a twierdzenia aksjomatami albo pewnikami teorii. Teoria zostaje wtedy zaksjomatyzowana. Zaksjomatyzowanie jest zawsze ustaleniem pewnych ram, poza które już wyjść nie można, jeżeli nie zmieni się aksjomatów. Przedaksjomatyczna postać teorii jest więc bogatsza, bo tkwią w niej możliwości różnych aksjomatyzacji. Istotne zakwestionowanie jednego układu aksjomatów i zaproponowanie nowego daje inną teorię aksjomatyczną, która jest konkurencyjna względem poprzedniej z takich czy innych względów. Jest więc względem niej pewną alternatywą.

Teoria mnogości (ST), dział matematyki zajmujący się zbiorami, którego podstawy sformułował Cantor, ma swoją postać przedaksjomatyczną oraz różne aksjomatyzacje. Alternatywna teoria mnogości (AST) sformułowana przez Vopěnkę kwestionuje niektóre aksjomaty ST. W dalszym ciągu zwrócimy uwagę tylko na niektóre różnice między ST i AST. Pełna analiza tych różnic nie jest tutaj możliwa.

Alternatywna teoria mnogości rozpatruje pojęcia pierwotne: klasa i zbiór. Każdy zbiór (w sensie AST) jest w sensie ST zbiorem skończonym (lecz nie na odwrót). Każdy zbiór jest klasą, ale nie każda klasa jest zbiorem, np. klasa wszystkich zbiorów. W AST każdą klasę, która jest zawarta w jakimś zbiorze, nazywa się semizbiorem. Istotą AST jest aksjomat mówiący, że istnieją semizbiory nie będące zbiorami. Intuicyjne przykłady podawane przez Vopěnkę to klasa wszystkich przodków Karola Darwina będących małpami czy zbiór ludzi żyjących na Ziemi w danej chwili. Jedną z konsekwencji powyższego aksjomatu jest to, że klasa (nie zbiór) liczb naturalnych w AST jest inna niż w ST. Oto jak definiujemy liczby naturalne:

Zbiór (w sensie AST) α jest liczbą naturalną, jeżeli spełnia warunki:

$$(\forall \beta \in \alpha)\,[\beta \subset \alpha],$$

tzn. każdy element zbioru α jest jego podzbiorem, (jest zbiorem w sensie AST),

$$(\forall \beta, \gamma \in \alpha)\,[\beta \in \gamma \vee \gamma = \beta \vee \gamma \in \beta].$$

Klasę liczb naturalnych oznaczamy przez $\boldsymbol{N}$.

Zauważmy, że zbiory: pusty $\emptyset$, jednoelementowy $\{\emptyset\}$, dwuelementowy $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ itd. są liczbami naturalnymi. Możemy je więc „zidentyfikować" z klasycznymi liczbami naturalnymi przyporządkowując

$$0 \leftrightarrow \emptyset, \quad 1 \leftrightarrow \{\emptyset\}, \quad 2 \leftrightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$$

Klasę liczb naturalnych odpowiadających klasycznym liczbom naturalnym oznaczmy przez $\boldsymbol{FN}$. W AST dowodzi się, że $\boldsymbol{N} \setminus \boldsymbol{FN} \neq \emptyset$. W AST mamy więc „więcej" liczb naturalnych niż w ST. (Pamiętajmy jednak, że **każda** liczba naturalna jest (jako zbiór w sensie AST) zbiorem skończonym w sensie ST.) W AST każdy zbiór okazuje się być równoliczny z jakąś liczbą naturalną (z klasy $\boldsymbol{N}$).

Postępując podobnie jak w ST można w oparciu o $\boldsymbol{N}$ określić klasę liczb całkowitych

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{N} \cup \{\langle 0, \alpha\rangle : \alpha \neq 0, \alpha \in \boldsymbol{N}\},$$

gdzie $\langle 0, \alpha\rangle$ jest parą uporządkowaną $\langle 0, \alpha\rangle = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \alpha\}\}$, oraz klasę liczb wymiernych $\boldsymbol{RN}$, w której określone są dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie mające znane własności. W $\boldsymbol{RN}$ określa się także pewną relację równoważności $\doteq$ zwaną relacją nierozróżnialności

$$\alpha \doteq \beta \Leftrightarrow (\forall n \in \boldsymbol{FN})\left[|\alpha - \beta| < \frac{1}{n} \text{ lub } (\alpha > n \text{ i } \beta > n) \text{ lub } (\alpha < -n \text{ i } \beta < -n)\right].$$

Rozwiązanie zadania F 186. Na skutek działania siły ciężkości gęstość gazu w dolnej części naczynia jest większa niż w górnej. Dlatego większe jest ciśnienie gazu na dno niż na górną część naczynia. Wypadkową siłę działającą na ścianki można wyznaczyć korzystając z łatwej do wyprowadzenia zależności ciśnienia od wysokości w polu grawitacyjnym (tzw. wzór barometryczny):

$$p = p_0 e^{-\mu g h / RT},$$

gdzie p_0 — ciśnienie w pobliżu dna, p — ciśnienie w górnej części naczynia, μ — masa cząsteczkowa, h — wysokość naczynia, R — stała gazowa, T — temperatura gazu. Siła wypadkowa (dla p niewiele różniącego się od p_0 i cylindrycznego naczynia):

$$F_w = S(p_0 - p) \simeq S p_0 \mu g h / RT,$$

gdzie S — pole powierzchni podstawy. Z równania stanu gazu doskonałego wynika, że średnia gęstość gazu jest w przybliżeniu równa $\varrho = p_0 \mu / RT$, co daje

$$F_w = Mg,$$

gdzie $M = \varrho \cdot S \cdot h$ jest masą gazu w naczyniu.

Zbiory liczb w AST mogą podobnie jak i zbiory liczb w ST służyć do opisu świata materialnego. Pokażemy to na przykładzie ruchu punktu materialnego. W mechanice analitycznej opartej o ST definiujemy następujące wielkości: liczbę $m \in \boldsymbol{R}_+$ i interpretujemy ją jako masę punktu, odwzorowanie klasy $\boldsymbol{C}^2$, $p : [t_0, t_1] \to \boldsymbol{R}^3$ interpretowane jako ruch punktu ($[t_0, t_1]$ jest przedziałem czasu) oraz odwzorowanie $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ interpretowane jako siła działająca na punkt. Ponadto żądamy, by m, p, f spełniały warunek

$$m \cdot \frac{d^2 p(t)}{dt^2} = f(t)$$

zwany prawem Newtona.

W AST postępujemy podobnie, choć inaczej. Rezygnujemy z opisu opartego na liczbach rzeczywistych zastępując je liczbami wymiernymi. Ruch określamy jako odwzorowanie zbioru chwil $I = \{t_0, t_1, \ldots, t_\omega\}$ $(\omega \in N)$ w iloczyn kartezjański $(\boldsymbol{BRN})^3$ zbioru $\boldsymbol{BRN}$ liczb wymiernych ograniczonych. Ruch p jest więc tutaj obiektem „danym" tylko w pewnych chwilach — tak jak to ma miejsce w kinie przy oglądaniu ruchu powstałego z nakładania na siebie kolejnych klatek taśmy filmowej. Dla takiego ruchu określamy prędkość i przyspieszenie

$$v(t_\alpha) = \frac{p(t_{\alpha+1}) - p(t_\alpha)}{t_{\alpha+1} - t_\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \omega - 1,$$

$$a(t_\alpha) = \frac{v(t_\alpha) - v(t_{\alpha-1})}{t_\alpha - t_{\alpha-1}}, \quad \alpha = 1, \ldots, \omega - 1.$$

Zauważmy, że tak określone prędkości i przyspieszenia zawsze istnieją i nie są wielkościami przybliżonymi. Jeśli jednak zażądamy, by przeciwdziedziny funkcji v i a były zawarte w $(\boldsymbol{BRN})^3$, to może się zdarzyć, że v lub a nie istnieją. Zawężenie przeciwdziedzin v i a do $(\boldsymbol{BRN})^3$ jest ograniczeniem na ruch p, nie wystarczającym jednak, by mieć ruch klasy $\boldsymbol{C}^2$.

Załóżmy więc ponadto, że $t_{\alpha+1} - t_\alpha = \varepsilon$ dla $\alpha = 0, 1, \ldots, \omega - 1$, gdzie $\varepsilon \doteq 0$. Utwórzmy dalej „średnie" ruchu, prędkości, przyspieszenia i siły

$$s_n(t_\alpha) = \frac{1}{2n-1} \sum_{\gamma=\alpha-n+1}^{\alpha+n-1} s(t_\gamma),$$

gdzie s oznacza jedną z liter p, v, a lub f, $1 \leqslant n \leqslant n(\alpha)$, $n(\alpha) = max\{\beta : t_{\alpha+\beta} \in I, t_{\alpha-\beta} \in I\} + 1$.

Łatwo sprawdzić, że dla tak uśrednionych wielkości zachodzi związek

$$ma_n(t_\alpha) = f_n(t_\alpha) \quad \text{dla } t_\alpha \in I.$$

Weźmy teraz takie $t_\alpha \in I$, że $\{t : t \doteq t_\alpha\} \subset [t_0, t_\omega]$.
Załóżmy, że istnieje takie $n_0 \in N$ spełniające warunek $n_0 \cdot \varepsilon \doteq 0$, że dla $n \geqslant n_0$ spełniających warunek $n \cdot \varepsilon \doteq 0$ zachodzi:

$$p_n(t_\alpha) \doteq p_{n_0}(t_\alpha), \; v_n(t_\alpha) \doteq v_{n_0}(t_\alpha),$$

$a_n(t_\alpha) \doteq a_{n_0}(t_\alpha)$, $f_n(t_\alpha) \doteq f_{n_0}(t_\alpha)$. W tym przypadku możemy przyjąć, że ruch, prędkość, przyspieszenie i siła określone są w każdej chwili $t \in \{t' : t' \doteq t_\alpha\} \subset [t_0, t_\omega]$ jako dowolne

$$\overline{p}(t), \overline{v}(t), \overline{a}(t), \overline{f}(t) \tag{1}$$

nierozróżnialne odpowiednio z $p_{n_0}(t_\alpha)$, $v_{n_0}(t_\alpha)$, $a_{n_0}(t_\alpha)$, $f_{n_0}(t_\alpha)$. Wielkości (1) spełniają związek $m\overline{a}(t) \doteq \overline{f}(t)$. Z własności liczb wymiernych oraz relacji nierozróżnialności wynika, że wśród obiektów (1) istnieją $\tilde{p}(t)$, $\tilde{v}(t)$, $\tilde{a}(t)$, $\tilde{f}(t)$, dla których

$$m\tilde{a}(t) = \tilde{f}(t). \tag{2}$$

Odwzorowanie $\tilde{p}(\cdot)$, dla którego istnieją $\tilde{v}(\cdot)$, $\tilde{a}(\cdot)$, $\tilde{f}(\cdot)$ oraz spełniony jest związek (2), nazwiemy ruchem regularnym, który odpowiada odwzorowaniu klasy $\boldsymbol{C}^2$ w ST, a więc ruchowi klasycznemu.

W oparciu o AST możliwe więc jest opisanie fizycznego pojęcia ruchu, siły i praw Newtona bez posługiwania się przejściem granicznym. Możliwe jest także określenie pewnych warunków regularności odpowiadających ciągłości i gładkości w analizie klasycznej. Przedstawione podejście jest ilustracją tezy sformułowanej w 1916 roku przez B. Russella we „Wstępie do filozofii matematyki": „Świat, w którym wszelki ruch składałby się z ciągu małych skończonych drgnień, byłby empirycznie nieodróżnialny od świata, w którym ruch byłby ciągły".

Rozwiązanie zadania M 418. Liczby $a_1, a_2, a_3 = 3, a_4 = 11$ są całkowite, nieparzyste. Przypuśćmy, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są całkowite, nieparzyste ($n \geqslant 4$). Mamy

$$a_n^2 + 2 = \left(\frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}\right)^2 + 2 = \frac{a_{n-1}^4 + 4a_{n-1}^2 + 4 + 2a_{n-2}^2}{a_{n-2}^2} = \frac{a_{n-1}^4 + 4a_{n-1}^2 + 2(a_{n-2}^2 + 2)}{a_{n-2}^2} = \frac{a_{n-1}^4 + 4a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}a_{n-3}}{a_{n-2}^2} = \frac{a_{n-1}(a_{n-1}^3 + 4a_{n-1} + 2a_{n-3})}{a_{n-2}^2}.$$

Zauważmy, że liczby a_{n-1} i a_{n-2} są względnie pierwsze (a_{n-2} jest nieparzysta, a więc względnie pierwsza z $a_{n-2}^2 + 2$), czyli $a_n^2 + 2$ dzieli się przez a_{n-1}, a stąd a_{n+1} jest liczbą całkowitą, nieparzystą.