Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1986

Zadania z matematyki nr 121, 122

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

121. W przestrzeni dany jest trójkąt ABC. Gdzie należy umieścić wierzchołek D czworościanu $ABCD$, by czworościan ten miał zadaną objętość V i minimalne pole powierzchni?

122. Znaleźć wszystkie funkcje $f: N \to R$ mające skończoną granicę $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ oraz spełniające warunek $f(xy) = f(x)+f(y)$ dla każdej pary liczb naturalnych x, y względnie pierwszych.

Zadanie **122** przysłał pan Sławomir Solecki z Ostrowa Wielkopolskiego.

Rozwiązania zadań z numeru 8/1985

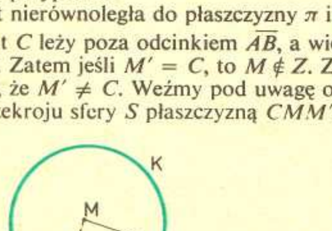
Przypominamy treść zadań:

113. W przestrzeni dana jest płaszczyzna π oraz dwa punkty A i B leżące poza tą płaszczyzną, po tej samej jej stronie. Niech Z będzie zbiorem tych punktów M, dla których istnieje sfera o środku M, przechodząca przez A i B, styczna do π. Udowodnić, że Z jest elipsą lub parabolą.

114. Dany jest ciąg liczb $a_n > 0$. Niech $x_n = (a_1a_2 \dots a_n)^{1/n}$. Dowieść, że $a_{n+1}+\dots+a_{n+m} \geqslant (n+m)x_{n+m}-nx_n$ dla dowolnych liczb naturalnych n, m.

113. Zauważmy, że środek każdej sfery przechodzącej przez punkty A i B musi należeć do płaszczyzny symetralnej odcinka $\overline{AB}$. Oznaczmy tę płaszczyznę przez σ. Dalsze rozważania ograniczymy do punktów $M \in \sigma$. Niech M będzie dowolnym punktem płaszczyzny σ, a M' jego rzutem na płaszczyznę π i niech S będzie sferą o środku M, przechodzącą przez A i B. Punkt M należy do zbioru Z wtedy i tylko wtedy, gdy M' należy do S. Rozróżnimy dwa przypadki:

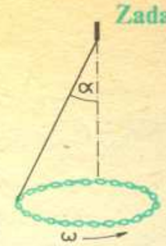
1° Prosta AB jest nierównoległa do płaszczyzny π i przecina π w punkcie C. Punkt C leży poza odcinkiem $\overline{AB}$, a więc na zewnątrz sfery S. Zatem jeśli $M' = C$, to $M \notin Z$. Załóżmy więc w dalszym ciągu, że $M' \neq C$. Weźmy pod uwagę okrąg K otrzymany w przekroju sfery S płaszczyzną CMM'.



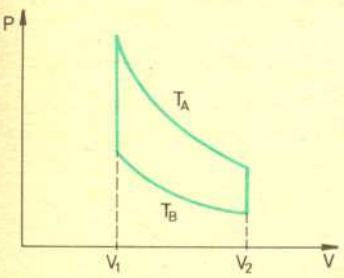
Poprowadźmy z punktu C półprostą $CD^{\to}$ styczną do K, po tej samej stronie prostej CM, co punkt M'; niech D będzie punktem styczności. Zachodzi wzór: $CD^2 = CA \cdot CB$. Kąty CDM i $CM'M$ są proste, zatem punkty D i M' leżą na półokręgu o średnicy $\overline{CM}$. Stąd wynikają równoważności: $M \in Z \Leftrightarrow M' \in S \Leftrightarrow M' \in K \Leftrightarrow M' = D \Leftrightarrow CM' = CD \Leftrightarrow CM' = \sqrt{CA\cdot CB} \Leftrightarrow$ punkt M należy do powierzchni bocznej walca o osi prostopadłej do π, przechodzącej przez C, o promieniu $\sqrt{CA\cdot CB}$. Ponieważ uwagę ograniczyliśmy do punktów płaszczyzny σ, więc Z jest w tym przypadku częścią wspólną tej płaszczyzny i wzmiankowanej powierzchni walca. Oś walca nie jest równoległa do σ, wobec czego zbiór Z jest elipsą.

2° Prosta AB jest równoległa do π. Płaszczyzny π i σ są prostopadłe. Oznaczmy środek odcinka $\overline{AB}$ przez E, a długość tego odcinka przez $2d$. Teraz mają miejsce równoważności: $M \in Z \Leftrightarrow M' \in S \Leftrightarrow MM' = MA \Leftrightarrow (MM')^2 = ME^2+d^2$. Oczywiście MM' jest odległością punktu M od płaszczyzny π, czyli odległością M od prostej λ będącej krawędzią przecięcia płaszczyzn π i σ. Zatem w tym przypadku Z jest zbiorem tych punktów płaszczyzny σ, których kwadraty odległości od ustalonego punktu i ustalonej prostej (punktu E i prostej λ) różnią się o wielkość stałą (o d^2). Taki zaś zbiór jest parabolą, co można łatwo wykazać metodą geometrii analitycznej: przyjmując (na płaszczyźnie σ) prostą λ za oś $0x$ i prowadząc oś $0y$ przez punkt E, tak, że $E = (0, b)$, widzimy, że zbiór Z jest opisany równaniem $y^2 = x^2+(y-b)^2+d^2$, czyli równaniem $2by = x^2+b^2+d^2$; jest więc istotnie parabolą.

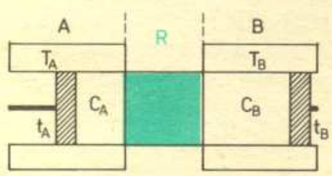
114. Pokażemy, że dla każdego k jest $a_k \geqslant kx_k-(k-1)x_{k-1}$; sumując po k od n+1 do $n+m$ otrzymamy stąd tezę zadania. Ponieważ $x_k^k = x_{k-1}^{k-1}a_k$, więc nierówność, którą mamy udowodnić, przybiera postać $x_k^k x_{k-1}^{-(k-1)} \geqslant kx_k-(k-1)x_{k-1}$, a po podzieleniu stronami przez x_{k-1} — postać $t^k \geqslant kt-(k-1)$, gdzie przez t oznaczyliśmy stosunek x_k/x_{k-1}. Należy więc wykazać, że nieujemne jest wyrażenie $w = t^k-kt+k-1 = t^k-(k-1)t-t+k-1 = (t^k-t)-(t-1)(k-1) = (t-1)((t^{k-1}+t^{k-2}+\dots+t)-(k-1))$. Oba czynniki otrzymanego iloczynu są liczbami tego samego znaku (dodatnie dla $t > 1$, ujemne dla $t < 1$, zero dla $t = 1$). Stąd $w \geqslant 0$.



Rys. 1



Rys. 3



Rys. 2

19. Zamknięty metalowy łańcuszek, połączony lekką nicią z pionową wirującą osią, wiruje z prędkością kątową ω przyjmując kształt kołowy jak na rysunku 1. Nić tworzy przy tym kąt α z pionem. Znaleźć odległość między środkiem ciężkości łańcuszka a osią obrotu.

20. W maszynie cieplnej przedstawionej schematycznie na rysunku 2 zachodzi proces kołowy składający się z dwóch przemian izotermicznych i dwóch przemian izochorycznych (rys. 3). Dwie części tej maszyny (oznaczone przez A i B) utrzymywane są w stałych temperaturach — odpowiednio T_A i T_B ($T_A > T_B$). Pomiędzy nimi znajduje się część pośrednia R, przez którą może przepływać z cylindra c_A do cylindra c_B lub odwrotnie stosowany jako ciało robocze gaz doskonały. Opisać funkcję, jaką spełnia w maszynie część R i podać, jakie powinna mieć ona cechy (jak może być zbudowana), aby funkcja ta była spełniana w sposób możliwie optymalny, tj. zapewniający sprawność maszyny zbliżoną do teoretycznej. Opisać ruchy tłoków t_A i t_B i ich wzajemną korelację konieczną do zapewnienia działania maszyny zgodnego z podanym cyklem
(a) podczas pracy maszyny jako silnika cieplnego oraz
(b) podczas pracy maszyny jako pompy cieplnej.

Rozwiązania zadań z numeru 8/1985

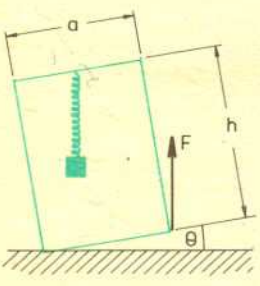
Przypominamy treść zadań:

11. W środku prostopadłościennej gablotki znajduje się przedmiot z cennego kruszcu, zawieszony na lekkiej, wiotkiej sprężynie, która jest zaczepiona do górnej ścianki. Zaproponować metody doświadczalne wyznaczenia masy tego przedmiotu, które by wykluczały jego zetknięcie się ze ściankami gablotki. Wszystkie ścianki są wykonane z takiej samej przezroczystej płyty, gęstość kruszcu nie jest znana.

12. Przyjmując, że potencjał górnej warstwy atmosfery, na wysokości 50 km, wynosi względem powierzchni Ziemi +400 kV, a pionowy gradient potencjału przy powierzchni Ziemi ma średnią wartość 100 V/m, obliczyć przybliżone wartości całkowitego ładunku elektrycznego kuli ziemskiej oraz całkowitego ładunku zawartego w atmosferze ziemskiej, podać znaki tych ładunków. Promień Ziemi wynosi 6400 km.

11. Spośród możliwych metod najprostsza wydaje się metoda statyczna, która polega na pomiarze siły F utrzymującej w stanie równowagi gablotkę podpartą na jednej krawędzi i wychyloną o kąt Θ względem pionu (rys. 4). Oznaczając przez M i m odpowiednio masę gablotki oraz zawieszonego w niej przedmiotu, a ponadto przez a i h boki gablotki, jak na rysunku, i przez g przyspieszenie ziemskie — wyprowadzamy z prostej analizy momentów sił (przy założeniu, że środek ciężkości gablotki pokrywa się z jej środkiem geometrycznym i że przedmiot nie styka się z jej ściankami) wzór na tę siłę

$$(*)\qquad F = \frac{1}{2}(M+m)g - \frac{h}{a}\left(\frac{M}{2}+m\right)g\ \mathrm{tg}\Theta.$$



Rys. 4

Zależność ta ma charakter liniowy: $F = A - B\ \mathrm{tg}\Theta$. Na podstawie określonych doświadczalnie współczynników A i B wyznaczamy $m = \frac{2}{g}\left(\frac{a}{h}B - A\right)$.

W metodzie dynamicznej na gablotkę zawieszoną na lince o długości $L \gg h$ działa się poziomą siłą F. Dla odpowiednio małego wychylenia x z położenia początkowego, spełniającego warunek $\frac{x}{L} \ll \frac{F}{mg}$, uzyskane przez gablotkę przyspieszenie jest równe $a = \frac{F}{M}$. Znając $M+m$ (z ważenia), możemy więc wyznaczyć m.

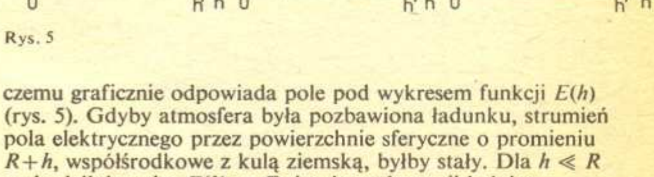
Istnieją też metody wykorzystujące drgania przedmiotu na sprężynie lub też wymuszone drgania gablotki (o innej częstotliwości) ze spoczywającym wewnątrz przedmiotem.

12. Traktujemy Ziemię jako kulę o promieniu R. Ładunek Ziemi obliczony na podstawie prawa Gaussa wynosi

$$|Q_z| = \varepsilon_0 4\pi R^2 E_0 \approx 5\cdot 10^5\,\mathrm{C};$$

E_0 jest tu (średnim) natężeniem pola elektrycznego przy powierzchni Ziemi, równym pionowemu gradientowi potencjału, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$ oznacza przenikalność elektryczną próżni. Ponieważ potencjał elektryczny nad powierzchnią Ziemi rośnie, znak ładunku Ziemi jest ujemny.
W celu wyznaczenia ładunku zawartego w atmosferze ziemskiej zauważmy, że potencjał na wysokości h' nad powierzchnią Ziemi — przy założeniu, że pole elektryczne ma kierunek pionowy, a jego wartość na wysokości h jest $E(h)$ — wynosi

$$V = \int_0^{h'} E(h)\mathrm{d}h,$$



Rys. 5

czemu graficznie odpowiada pole pod wykresem funkcji $E(h)$ (rys. 5). Gdyby atmosfera była pozbawiona ładunku, strumień pola elektrycznego przez powierzchnie sferyczne o promieniu $R+h$, współśrodkowe z kulą ziemską, byłby stały. Dla $h \ll R$ zachodziłoby więc $E(h) = E_0$ i w konsekwencji byłoby $V = E_0 h' = 5\cdot 10^6 V$ (rys. 5a). Ponieważ podana w zadaniu wartość potencjału V jest $k = 12{,}5$ razy mniejsza, pole pod krzywą $E(h)$ musi być też k razy mniejsze. Wymaga to przyjęcia, że w atmosferze istnieje ładunek dodatni. Przy dodatkowym założeniu, że na żadnej wysokości h nie ma ładunku ujemnego, funkcja $E(h)$ jest monotoniczna, co prowadzi do wniosku $0 < E(h') < E_0/k$ (rys. 5b, c). Oznaczając ładunek atmosfery przez Q_a otrzymujemy zatem z prawa Gaussa

$$0 < |Q_z + Q_a| < |Q_z|/k,\ \text{a stąd}\ \frac{k-1}{k}|Q_z| < Q_a < |Q_z|.$$

Stwierdzamy więc, że dodatni ładunek zawarty w atmosferze jest w przybliżeniu równy ujemnemu ładunkowi Ziemi.

Uwaga: przy wyprowadzeniu wzoru (*) przyjęto, że punkt zaczepienia sprężyny znajduje się na środku górnej ścianki, ewentualne odstępstwo od tego położenia — wobec możliwości zmierzenia odległości — daje się łatwo uwzględnić.