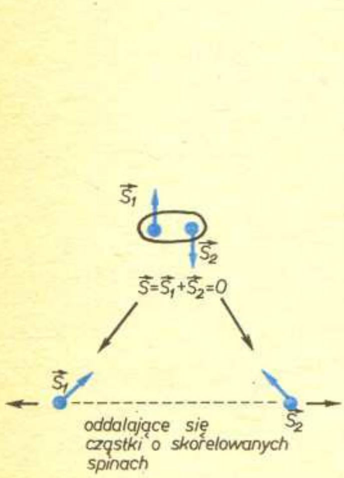
Mechanika kwantowa, paradoks Einsteina-Podolsky'ego-Rosena i komunikacja z szybkością nadświetlną (II)

Dr Włodzisław DUCH

Paradoks EPR, jak nazwał doświadczenie myślowe Einsteina, Podolsky'ego i Rosena znany fizyk angielski Dawid Bohm, uznawany był przez długie lata za problem czysto akademicki. W 1951 roku Bohm opisał w swoim podręczniku mechaniki kwantowej znacznie prostszą wersję tego paradoksu, możliwą do eksperymentalnej weryfikacji. Bohm interesował się przez długi czas możliwością wprowadzenia do mechaniki kwantowej ,,ukrytych parametrów", by uczynić z niej ,,porządną", realistyczną i lokalną teorię. Próby takie nigdy się nie powiodły i w latach pięćdziesiątych interpretacja matematycznego formalizmu mechaniki kwantowej, stworzona głównie przez Bohra, zwana często ,,interpretacją kopenhaską" (Bohr pracował w Kopenhadze) była już dość powszechnie przyjęta. Poszukiwanie ukrytych parametrów doprowadziło jednak do pewnych rezultatów ubocznych: Bohm wymyślił nową wersję paradoksu EPR, a później John Bell swoją słynną nierówność.

Najprostszą parą wielkości komplementarnych są dwie składowe spinu cząstki. Spin, czyli wewnętrzny moment pędu, jest (jak każdy moment pędu) wielkością wektorową, ma więc trzy składowe. Jednoznaczny pomiar dowolnych dwóch składowych jest — jak wynika z podstawowych zasad mechaniki kwantowej — niemożliwy. Ponieważ składowe spinu mierzone w jednostkach kwantu działania $\hbar = h/2\pi$ przyjmować mogą tylko wartości połówkowe lub całkowite, ich pomiar jest znacznie prostszy niż pomiar położeń czy pędów cząstek. David Bohm zaproponował więc następujący schemat doświadczenia: weźmy parę cząstek lub atomów, których sumaryczny spin jest równy zeru, a następnie je rozdzielmy. Otrzymujemy dwie cząstki w różnych, odseparowanych od siebie obszarach przestrzeni. Ponieważ ich sumaryczny spin nie uległ zmianie, wiemy, że jeśli składowa S_x dla pierwszej cząstki wynosi $+1$, to dla cząstki drugiej musi być dokładnie przeciwna, czyli -1. Pomiary składowych spinu w dwóch obszarach muszą więc dać dokładnie skorelowane wartości. Mierząc składową S_x dla cząstki pierwszej, a S_y dla drugiej, poznajemy więc dwie składowe spinu dla każdej z tych cząstek, a przecież zgodnie z mechaniką kwantową nie mogą one być określone równocześnie! Tak właśnie wygląda nowa wersja poradoksu EPR.



Rys. 1

Przeanalizujemy teraz dokładniej, co się właściwie w tym doświadczeniu dzieje. Ocena zależy od tego, w jaki sposób interpretujemy formalizm mechaniki kwantowej. Wersja trywialna, za którą opowiada się Einstein, jest taka: nie stało się nic nadzwyczajnego. Wszystkie składowe spinu są w rzeczywistości dobrze określone, chociaż my ich nie znamy, a mechanika kwantowa nie potrafi tego faktu opisać. Jest więc rzeczą całkiem oczywistą, że pomiar składowej spinu jednej cząstki daje informację o odpowiedniej składowej cząstki drugiej. Funkcja falowa nie opisuje rzeczywistego stanu układu, a jedynie dostępną nam wiedzę o uśrednionych wynikach dużej liczby pomiarów. Cząstki są niezależne i pomiar własności jednej z nich nie wpływa na drugą. Jest to postawa uznająca zarówno realizm, jak i lokalność. Wersja Bohra jest znacznie dziwniejsza: składowe spinu, podobnie jak położenie fotonu w opisanym poprzednio eksperymencie, nie są określone aż do momentu pomiaru. Dopiero pomiar powoduje, że z potencjalnie możliwych wartości aktualizuje się jedna; w tym samym momencie urzeczywistnia się również odpowiednia składowa drugiej cząstki. Pomiar nie jest więc aktem biernego stwierdzenia tego co jest, lecz ,,elementarnym aktem tworzenia", jak nazywa to Wheeler. Interpretacja taka nie jest zgodna z realizmem — rzeczywistość nie jest w pełni aktualna przed pomiarem — ani z lokalnością — wpływ na drugą cząstkę jest natychmiastowy. Zauważmy jednak, że nie jest to zwykłe przekazywanie informacji, gdyż nie ma tu wymiany żadnych sygnałów i nie mamy do czynienia z przekazywaniem energii.

Czy można odróżnić te dwie interpretacje w jakimkolwiek eksperymencie? Przez długi czas wydawało się, że jest to niemożliwe. Przełom nastąpił w 1965 roku, kiedy to John S. Bell, pracujący w CERN-ie, udowodnił pewną bardzo ogólną nierówność, która obowiązuje dla wszystkich realistycznych teorii lokalnych, lecz nie zawsze jest zgodna z przewidywaniami mechaniki kwantowej. Realistyczne teorie lokalne (w skrócie teorie RL) są teoriami, które można interpretować ,,w duchu Einsteina". Po raz pierwszy pojawiła się więc możliwość

eksperymentalnego sprawdzenia, czy warto szukać teorii RL, które zastąpiłyby mechanikę kwantową, czy też w naszych poszukiwaniach pełnego opisu zjawisk natury musimy z takich teorii zrezygnować. Wystarczyło w tym celu sprawdzić eksperymentalnie, czy spełniona jest nierówność Bella. Z jej spełnienia automatycznie wynika, że mechanika kwantowa nie jest dobrą teorią indywidualnych zjawisk. Jeśli natomiast nierówność ta nie będzie spełniona i wyniki doświadczeń potwierdzą przewidywania mechaniki kwantowej, trzeba będzie zrezygnować z poszukiwań ,,wielkiej, zunifikowanej teorii'' wszystkich zjawisk, o której marzą fizycy, wśród teorii typu RL (mechanika kwantowa taką teorią oczywiście nie jest, gdyż nie obejmuje ani oddziaływań grawitacyjnych, ani silnych i słabych).

Spróbujemy teraz napisać nierówność Bella i pokazać, że założenie realizmu i lokalności prowadzi do sprzeczności z przewidywaniami mechaniki kwantowej. W tym celu wyobraźmy sobie (rys. 2) źródło, wysyłające pary cząstek, np. elektronów, w przeciwnych kierunkach.

Rys. 2

Każda para cząstek ma całkowity spin równy zeru. Po obu stronach ustawiona jest aparatura, za pomocą której możemy mierzyć dowolne składowe wektora spinu. Jest to bardzo proste — wystarczy przepuścić elektron przez pole magnetyczne, które odchyli go w dół lub w górę, zależnie od rzutu wektora spinu na kierunek pola magnetycznego. Ze względów historycznych nazywa się taką aparaturę ,,filtrem Sterna-Gerlacha'' (filtr — bo oddziela cząstki o różnych składowych spinu). W obszarze I ustawimy nasz filtr pod kątem α względem pionu, a w obszarze II pod kątem β. Wyniki pomiaru składowych spinu dla pary numer j w takim układzie eksperymentalnym oznaczymy przez $r_{1j}(\alpha, \beta)$ i $r_{2j}(\alpha, \beta)$. Używając jako jednostek $\hbar/2$ dla elektronów otrzymujemy wartości składowych równe $\pm$ 1. Oznaczmy przez $N_{++}(1\alpha, 2\beta)$ liczbę tych pomiarów, w których $r_{1j}(\alpha, \beta) = r_{2j}(\alpha, \beta) = +1$, czyli w obu obszarach rzut spinu zgodny jest z kierunkiem pola. Po wykonaniu serii N pomiarów możemy oczywiście zmienić kąty na inne. Nierówność Bella mówi, że dla trzech serii pomiarów musimy otrzymać

$$N_{++}(1\alpha, 2\beta)+N_{++}(1\beta, 2\gamma) \geqslant N_{++}(1\alpha, 2\gamma).$$

Dzieląc obie strony nierówności przez liczbę pomiarów w każdej serii otrzymujemy prawdopodobieństwo $P_{++}(1\alpha, 2\beta) = N_{++}(1\alpha, 2\beta)/N$ tego, że oba wyniki wyniosą $+1$, przy pomiarze rzutu spinu na kierunek α w obszarze I i β w obszarze II

$$P_{++}(1\alpha, 2\beta)+P_{++}(1\beta, 2\gamma) \geqslant P_{++}(1\alpha, 2\gamma).$$

Nierówność ta musi być spełniona, jeśli słuszny jest realizm i lokalność. Jak zachowuje się $P_{++}(1\alpha, 2\beta)$ dla różnych kątów? Dla $\alpha = \beta$ (pomiar rzutów na ten sam kierunek) musimy otrzymać w obu obszarach wartości przeciwne, a więc prawdopodobieństwo otrzymania obu jednakowych $P_{++}(1\alpha, 2\alpha) = 0$. Z drugiej strony jeśli $\alpha-\beta = 90°$, mamy pomiar dwóch niezależnych składowych, dający z jednakowym prawdopodobieństwem cztery wyniki: $+1/+1$, $+1/-1$, $-1/+1$ i $-1/-1$, a więc $P_{++}(1\alpha, 2\beta) = 1/4$. Zgodnie z mechaniką kwantową

$$P_{++}(1\alpha, 2\beta) = 1/2 \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

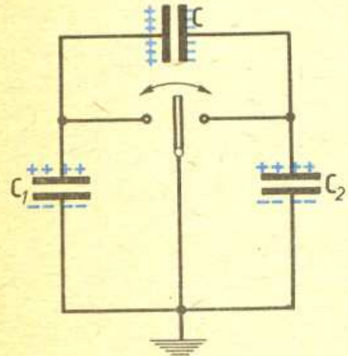
co zgadza się z powyższymi wynikami. Oszacujmy teraz lewą i prawą stronę nierówności Bella korzystając z powyższego wzoru dla kątów $\alpha = 0°$, $\beta = 45°$ i $\gamma = 90°$. Otrzymujemy: $0{,}146 \ldots \geqslant 0{,}250$, a więc przewidywania mechaniki kwantowej nie zgadzają się z tą nierównością.

Nie wchodząc w subtelne rozważania zauważmy, że w przedstawionym powyżej rozumowaniu, jak i w dowodzie nierówności Bella, ukryte są trzy założenia. Pierwszym z nich jest uznanie słuszności wnioskowania indukcyjnego — z dużej liczby pomiarów określamy prawdopodobieństwa, a więc wnioskujemy o możliwym zachowaniu się układu w przyszłych pomiarach. Jest to założenie niezbędne do wyprowadzenia jakichkolwiek wniosków z eksperymentów. Drugim założeniem jest uznanie pewnej formy realizmu: przedmioty mają własności niezależnie od tego czy decydujemy się je mierzyć czy nie. Wreszcie trzecim, najbardziej tu widocznym założeniem, jest lokalność. W ostatnim dziesięcioleciu przeprowadzono szereg doświadczeń, mających na celu eksperymentalną weryfikację nierówności Bella. Były to doświadczenia fascynujące. Od ich wyniku zależy bowiem sposób, w jaki patrzymy na świat. Szczególnie dokładne doświadczenia wykonał w ostatnich latach Allain Aspect we Francji. Ze względów technicznych mierzono

Rozwiązanie zadania M 417. Przypuśćmy, że wielomian $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ spełnia założenia zadania.
Wielomiany $P_i(x) = \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-i+1)\cdot(x-i-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)}{i\cdot(i-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(i-n)}$ przyjmują w punktach $0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ wartość zero, a w punkcie i wartość 1. Tak więc wielomiany Q i $\sum_{i=0}^{n} Q(i)\cdot P_i$ są równe, bo w $n+1$ punktach przyjmują te same wartości. Wielomian $\sum_{i=0}^{n} Q(i)\cdot P_i$, a więc i Q ma wszystkie współczynniki wymierne. Wielomian Q każdą wartość przyjmuje w skończonej liczbie punktów, czyli dla pewnego $m > 0$ liczba $Q(m) = q$ jest względnie pierwsza z mianownikami wszystkich współczynników a_i. Dla dowolnych naturalnych k, j liczba $(m+kq)^j - m^j$ jest podzielna przez q, a więc również $Q(m+kq) - -Q(m) = \sum_{j=1}^{n} a_j((m+kq)^j - m^j)$ dzieli się przez q. Stąd któraś z wartości $Q\ (m+kq)$ musi być liczbą złożoną ($Q(m+kq) = Q(m)$ tylko dla skończenie wielu k).

polaryzację fotonów, a nie rzuty spinów elektronów, nie czyni to jednak istotnej różnicy. Wyniki pomiarów wskazują jednoznacznie — nierówność Bella nie jest spełniona! Nie da się utrzymać jednocześnie lokalności i realizmu, niezależnie od teorii, jaką się posługujemy. W pierwszych wersjach doświadczeń polaryzatory ustawiano przed wykonaniem serii pomiarów, miały więc dość czasu, żeby ,,wyczuć" swoje wzajemne położenie. Chociaż możliwość taka wydaje się zupełnie nieprawdopodobna, postanowiono jednak wykluczyć ją doświadczalnie. W najnowszej wersji eksperymentów Aspecta kąt ustawienia polaryzatorów wybierany był w ostatnim momencie przed wykonaniem pomiarów tak, że żaden sygnał o prędkości nie większej od prędkości światła nie mógł przenieść informacji między przyrządami. Wszystkie wyniki zgadzają się znakomicie z przewidywaniami mechaniki kwantowej. Przedstawiając to zagadnienie celowo starałem się uniknąć szczegółowego omawiania różnych interpretacji i subtelności mechaniki kwantowej. Każda teoria fizyczna oprócz formalizmu matematycznego zawierać musi pewną interpretację. Większość fizyków radzi sobie jednak całkiem dobrze nie przejmując się takimi ,,subtelnościami". W wydanym u nas podręczniku mechaniki kwantowej znany fizyk amerykański Wichman pisze np., że zagadnienia interpretacji nie są ważne, gdyż nie dyskutuje ich w czasie obiadu, gdy omawia z kolegami wszystkie ważne w fizyce tematy. W wyniku eksperymentów sprawdzających nierówność Bella zagadnienia interpretacji stały się znowu modne i z pewnością fizycy w Berkeley, gdzie pracuje Wichman, dyskutują o nich w czasie obiadów. Można jednak odnieść wrażenie, że prawie każdy fizyk, zabierający w tych sprawach głos, ma odmienną opinię. Nie chodzi przy tym o drobne różnice, lecz o tak podstawowe sprawy, jak: Co właściwie opisuje mechanika kwantowa? Czy pojedyncze cząstki, czy zespoły cząstek? Czy funkcja falowa daje informację o stanie układu, czy tylko o możliwej informacji dotyczącej tego stanu? Jaka jest rola obserwatora i rola świadomości w mechanice kwantowej? Nie brakuje przy tym bardzo radykalnych rozwiązań, takich jak teoria wielu światów Everetta, czy też teoria ukrytego porządku Davida Bohma. W opublikowanym niedawno wywiadzie Richard Feynman stwierdził: ,,Jak długo wydaje się, że przyroda skonstruowana jest na zasadzie trybików, w trybikach szukamy tego najbardziej wewnętrznego — ale to może nie być tak i wtedy szukamy, czym u diabła jest to, co znajdujemy!" Potrzeba takich radykalnych poszukiwań jest widoczna. Ponieważ prawie pod każdym z możliwych rozwiązań znaleźć można podpisy szeregu znakomitych fizyków, rozstrzygnięcie, kto ma rację, nie wydaje się w tej chwili możliwe. Nierówność Bella pozwala na wyeliminowanie pewnych interpretacji (np. ukrytych parametrów lokalnych), ale nie prowadzi do jednoznacznego rozstrzygnięcia tych zagadnień. Zamiast wdawać się w zagadnienia meta-fizyczne zastanówmy się nad możliwością praktycznego wykorzystania paradoksu EPR. Kilku autorów zwróciło uwagę na możliwość przesyłania informacji ,,bez przesyłania sygnałów" z prędkością większą niż prędkość światła, za pomocą korelacji między pomiarami składowych spinów. W Stanach Zjednoczonych jeden z takich pomysłów został nawet opatentowany. Podstawowa idea jest bardzo prosta: wysyłajmy pary skorelowanych cząstek na dużą odległość rozciągając ,,nić cząstek" między miejscem, z którego będziemy nadawać sygnały, i miejscem odbioru. Wykonując pomiary rzutu spinu jednej z cząstek znamy odpowiedni rzut dla cząstki drugiej. Wyniki pomiarów tworzą jednak przypadkowe ciągi (średnio biorąc występuje tyle samo wartości dodatnich, co i ujemnych), nie przekazują

Rozwiązanie zadania F 184. Uziemianie okładek kondensatora modeluje obwód przedstawiony na rysunku, gdzie kondensatory C_1 i C_2 reprezentują pojemności układu okładka-ziemia.



Uziemianiu układu towarzyszy rozładowywanie kondensatorów C_1 i C_2, a usuwaniu przewodu uziemiającego ponowne ich ładowanie ładunkiem z kondensatora C. Kondensator ten ulega więc stopniowemu rozładowaniu.

Pokażemy w inny sposób, że założenie lokalności i realizmu prowadzi do sprzeczności z wynikami mechaniki kwantowej. Obliczymy średnie wartości iloczynów $r_{1j}(\alpha, \beta) \cdot r_{2j}(\alpha, \beta)$. Jeśli wybierzemy jednakowe kąty, to iloczyn ten równy jest oczywiście -1, jeśli kąty różnią się o 90°, to mamy dwa niezależne pomiary, a więc iloczyn będzie równie często $+1$, jak i -1, czyli średnia będzie zero. Średnia wartość iloczynu wynikająca z reguł mechaniki kwantowej wynosi $-\cos(\alpha-\beta)$, a więc

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} r_{1j}(\alpha, \beta) \cdot r_{2j}(\alpha, \beta) = -\cos(\alpha-\beta).$$

Wybierzmy teraz $\alpha = 0°$ lub 90°, a $\beta = 0°$ lub 135°. Mamy więc cztery serie pomiarów, dla których przewidujemy:

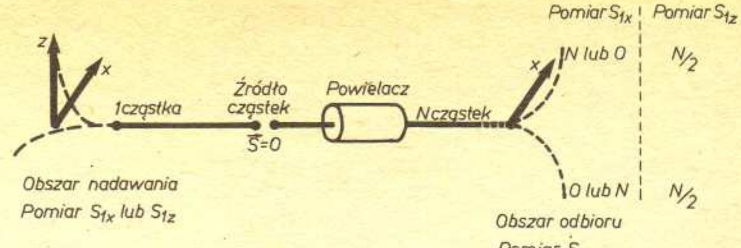
(1) $$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} r_{1j}(0°, 0°) \cdot r_{2j}(0°, 0°) = -1$$

(2) $$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} r_{1j}(90°, 0°) \cdot r_{2j}(90°, 0°) = 0$$

(3) $$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} r_{1j}(0°, 135°) \cdot r_{2j}(0°, 135°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(4) $$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} r_{1j}(90°, 135°) \cdot r_{2j}(90°, 135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Załóżmy teraz, że obszary I i II są od siebie oddzielone, a więc kąt ustawienia przyrządu w obszarze II nie wpływa na wynik pomiaru w obszarze I (jest to założenie lokalności). Wynika stąd: $r_{1j}(0°, 0°) = r_{1j}(0°, 135°) = r_{1j}$,



Rys. 3

więc żadnej informacji. Wprowadźmy teraz do naszego układu dodatkowy element (rys. 3): powielacz cząstek o określonym spinie. Powielacz powinien być tak skonstruowany, by nie zaburzał korelacji między pomiarami składowych spinu cząstek. Jedną z cząstek należących do pary o całkowitym spinie równym zeru powielimy N razy. Nasze urządzenie można teraz wykorzystać jako telegraf Morse'a. Po stronie nadawania mamy do wyboru pomiar składowej S_x lub S_z wektora spinu, po stronie odbioru zawsze mierzymy składową S_x dla N powielonych cząstek. Jeśli po stronie nadawania wybierzemy pomiar składowej S_x, wszystkie N cząstek po stronie odbiornika powinny mieć składową przeciwną, a więc ulegną odchyleniu w tę samą stronę w polu magnetycznym. Jeśli jednak wybierzemy pomiar składowej S_z, nie ma powodu, by wszystkie N cząstek miały tę samą składową S_x (muszą mieć oczywiście określoną składową z-ową, ale tej nie mierzymy w naszym odbiorniku). Dlatego średnio połowa powinna ulec odchyleniu w górę, a połowa w dół. Zmiana kierunku pola magnetycznego w obszarze nadawania (wybór pomiaru) wywołuje łatwo dostrzegalny efekt w obszarze odbioru. Niestety! Cały ten piękny układ nie będzie działać. W 1983 roku pokazano, że z zasad mechaniki kwantowej wynika niemożliwość powielania cząstek o określonym spinie. Całe przedstawione tu rozumowanie zakłada zresztą pewną, niekoniecznie słuszną, interpretację mechaniki kwantowej, w której uznaje się realizm (spiny są określone, bo inaczej powielanie nie ma sensu), lecz nie lokalność. Jest jeszcze inny, bardzo mocny argument przeciwko możliwości zbudowania takiego urządzenia. Już na początku tego wieku, wkrótce po odkryciu teorii względności, udowodniono, że gdyby możliwe było przekazywanie sygnałów z prędkością większą niż prędkość światła (np. za pomocą tachionów — hipotetycznych cząstek poruszających się szybciej niż światło), musiałyby powstać zamknięte pętle czasowe! Otrzymywalibyśmy odpowiedź jeszcze przed wysłaniem pytania! Jest to konsekwencja zupełnie absurdalna i dlatego prawie wszyscy fizycy z góry odrzucają możliwość takiej komunikacji.

Einstein nawet nie podejrzewał, na jakie manowce doprowadzi fizyków odkrycie holistycznej natury mechaniki kwantowej, ujawniającej się w paradoksie EPR. Przyroda okazała się bardziej subtelna i interesująca, niż można to było przypuszczać. Zdrowy rozsądek — jak powiedział Einstein — ciągle okazuje się być sumą przesądów nabytych w dzieciństwie.

$r_{1j}(90°, 0°) = r_{1j}(90°, 135°) = r'_{1j}$ oraz $r_{2j}(0°, 0°) = r_{2j}(90°, 0°) = r_{2j}$, $r_{2j}(0°, 135°) = r_{2j}(90°, 135°) = r'_{2j}$ ($r_{1j}(\alpha, \beta)$ zależy tylko od α, a $r_{2j}(\alpha, \beta)$ tylko od β). Podstawienie tych wartości do naszego układu prowadzi do sprzeczności, mamy bowiem wówczas:

(1) $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} r'_{1j}r_{2j} = -1$, a wynika stąd, że $r_{1j} = -r_{2j}$;

(2) $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} r'_{1j}r_{2j} = 0$ razem z wynikiem (1) daje to $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} r'_{1j}r_{1j} = 0$;

(3) $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} r_{1j}r'_{2j} = \sqrt{2}/2$;

(4) $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} r'_{1j}r'_{2j} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ z dwóch ostatnich równości otrzymujemy: $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} (r_{1j}-r'_{1j})r'_{2j} = \sqrt{2}$, ale

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(r_{1j}r'_{2j}-r'_{1j}r'_{2j}) = \frac{1}{N}\sum_{j}(r_{1j}r'_{1j}r'_{1j}r'_{2j}-r'_{1j}r'_{2j}) = \frac{1}{N}\sum_{j}(r_{1j}r'_{1j}-1)r'_{1j}r'_{2j} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{j}|r_{1j}r'_{1j}-1|\cdot|r'_{1j}r'_{2j}| =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j}|r'_{1j}r_{1j}-1| = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(1-r_{1j}r'_{1j}) = 1$$ (skorzystaliśmy z faktu, że: $r'_{1j}r'_{1j} = 1$, $|r'_{1j}r'_{2j}| = 1$

oraz $r_{1j}r'_{1j}-1 = 0$ lub -2), otrzymaliśmy więc sprzeczność $\sqrt{2} \leqslant 1$.

Rozwiązanie zadania M 415. Niech trójkąty $AB'C'$, $A'BC''$, $A''B''C$ będą obrazami trójkąta ABC w jednokładności prostej o stosunku $\frac{2}{3}$ odpowiednio względem punktów A, B, C. Środek odcinka YZ leży w trójkącie ABC, a więc jeśli X znajduje się w punkcie A, to środek ciężkości ΔXYZ leży w $\Delta AB'C'$. Podobnie środek ciężkości ΔXYZ musi leżeć w trójkątach $A'BC''$ i $A''B''C$. Ponieważ środek ciężkości ΔXYZ jest stały, więc musi leżeć w każdym z tych trójkątów, ale w przecięciu trójkątów $AB'C'$, $A'BC''$, $A''B''C$ leży dokładnie jeden punkt — środek ciężkości trójkąta ABC.