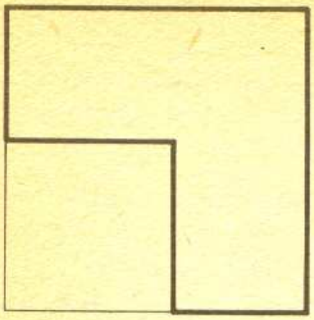
Zadanie Fryderyka II



Rys. 1. Gnomonem nazywamy figurę powstałą z odcięcia od kwadratu o boku naturalnym kwadratu o boku naturalnym.

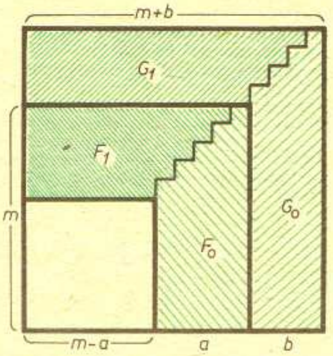
W 1225 roku cesarz Fryderyk II zadał uczonemu Leonardo, znanemu jako Fibonacci, pytanie:

Jaki pełny kwadrat po zmiejszeniu i zwiększeniu o 5 pozostaje pełnym kwadratem?

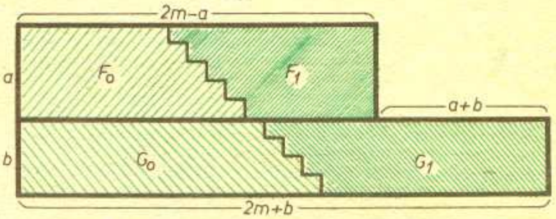
Trzeba dodać, że za pełne kwadraty uważano kwadraty liczb wymiernych.

Znamy odpowiedź Fibonacciego, $\frac{1681}{144}$, lecz nie wiemy jak do niej doszedł. Próby algebraicznego rozwiązywania prowadzą do równań co najmniej czwartego stopnia. A oto rozwiązanie używające metod znanych w epoce Fibonacciego.

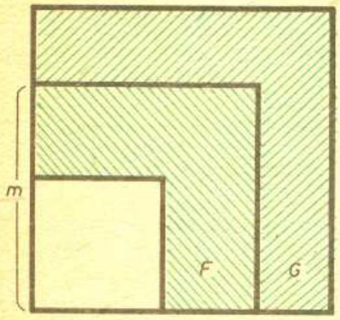
Chcemy znaleźć takie liczby naturalne m i n, że m^2-5n^2 i m^2+5n^2 są kwadratami liczb naturalnych. Oznacza to geometrycznie, że chcemy znaleźć dwa gnomony F i G jak na rysunku 2, każdy o polu $5n^2$.



Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 2

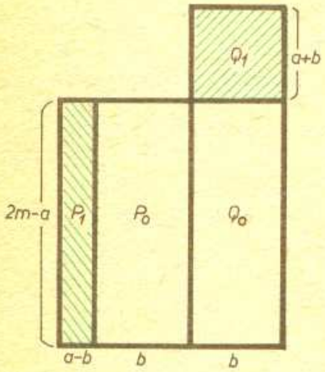
Podzielmy gnomony linią łamaną (o odcinkach długości 1) jak na rysunku 3a i złóżmy z otrzymanych części dwa prostokąty o podstawach równych a i b, gdzie a i b są liczbami naturalnymi, $a>b$ (rys. 3b). Zauważmy, że różnica wysokości prostokątów jest równa $a+b$ (wysokość wyższego prostokąta wynosi $2m+b$, zaś wysokość niższego — $2m-a$).

Odetnijmy teraz od każdego z prostokątów prostokąt o podstawie b i wysokości $2m-a$ (rys. 4). Mamy

$$\frac{a}{a-b}=\frac{\text{pole } P_1\cup P_0}{\text{pole } P_1}=\frac{\text{pole } P_1\cup P_0}{\text{pole } Q_1}=\frac{5n^2}{b(a+b)},$$

czyli $n^2=\frac{ab(a+b)}{5(a-b)}$.

Jeśli teraz założymy, że np. $a=5k$, gdzie k jest liczbą naturalną, to $n^2=\frac{kb(5k+b)}{5k-b}$ i dla $b=4k$ ułamek po prawej stronie staje się kwadratem liczby naturalnej $n=6k$.



Rys. 4

Obliczmy teraz m. Mamy

$$2m-a=\frac{\text{pole } P_1}{a-b}=\frac{\text{pole } Q_1}{a-b}=\frac{b(a+b)}{a-b},$$

a więc $2m=41k$ i żądany ułamek $\frac{m^2}{n^2}=\left(\frac{\frac{41}{2}k}{6k}\right)^2=\left(\frac{41}{12}\right)^2$.

J.R.