O ciekawych własnościach szeregu harmonicznego

Mgr Piotr ZARZYCKI

W listopadzie 1980 roku w dziale zadaniowym „Rozkosze Łamania Głowy", ukazującym się raz w tygodniu w „Życiu Warszawy" znalazło się takie oto zadanie:

Pierwszego listopada br. wieczorem pewien ślimak postanowił wspiąć się na szczyt liczącego 12 cm wysokości pędu bambusowego. Ślimak w ciągu nocy wspiął się o 3 cm i zasnął. W ciągu dnia zaczął rosnąć bambus i urósł o 12 cm. Jeżeli każdej następnej nocy ślimak będzie się wspinał o dalsze 3 cm i każdego następnego dnia bambus będzie rósł o 12 cm, to którego dnia ślimak będzie się już znajdował na wierzchołku bambusa?
Bambus rośnie równomiernie, zarówno pod, jak i nad ślimakiem.

Zdecydowana większość osób zapytanych o to, czy ślimak w ogóle dotrze do wierzchołka bambusa, odpowiadała prawie bez namysłu, że nie. Czy rzeczywiście? Treść zadania sugeruje, że nasz nieugięty ślimak w końcu dotrze do wierzchołka bambusa, a jednak intuicja mówi, że nie dojdzie. To, że tym razem intuicja zawodzi, związane jest z dość dziwnym zachowaniem się szeregu harmonicznego. Zanim dokładniej to wyjaśnimy, rozwiążemy zadanie z „Życia Warszawy".

Czytelnik łatwo sprawdzi, że jeśli przez x_n oznaczymy wysokość, na której znajduje się ślimak po n-tej dobie wędrówki, to dla $n = 1, 2, \ldots$ zachodzi następująca zależność

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n} x_n + 3,$$

a stąd po przekształceniach otrzymujemy wzór na wyraz ogólny ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

$$x_n = 3n(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n).$$

Aby rozwiązać nasze zadanie, wystarczy znaleźć takie n, by zachodziła nierówność

$$3n(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n) \geqslant 12n,$$

czyli

$$1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n \geqslant 4$$

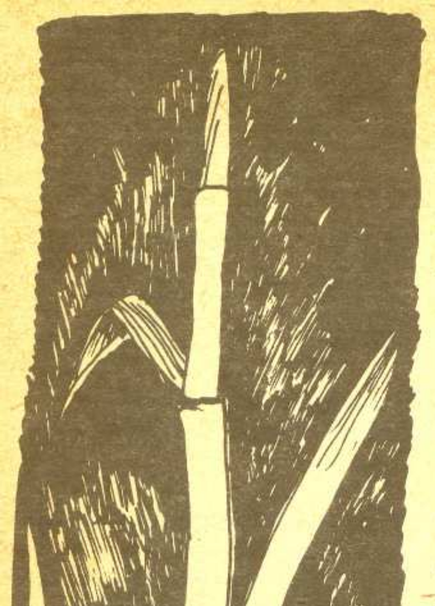
($12n$ jest wysokością bambusa po n dniach). Najmniejsze n spełniające ostatnią nierówność jest równe 31, co daje nam odpowiedź: ślimak wszedł na wierzchołek bambusa w nocy z pierwszego na drugiego grudnia.

Rozwiązalność nierówności $1 + 1/2 + \ldots + 1/n \geqslant 4$ wynika z następującego faktu (porównaj **Własność 1**):

dla dowolnej liczby rzeczywistej r istnieje taka liczba naturalna n, że $1 + 1/2 + \ldots + 1/n \geqslant r$.

Innymi słowy, szereg $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots$ $\left(\text{oznaczać go będziemy przez } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$ jest rozbieżny. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ to właśnie ów tytułowy szereg harmoniczny. Liczbę $s_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ nazywamy n-tą sumą częściową szeregu harmonicznego.

Rozwiązanie zadania M 413. Niech v_1, v_2, v_3, v_4 będą wektorami jednostkowymi prostopadłymi do prostych AB, BC, CD, AD — odpowiednio o zwrocie „do wewnątrz" czworokąta $ABCD$. Jeśli punkty X i Y leżą po tej samej stronie prostej AB co punkt C, to różnica odległości X i Y od prostej AB jest równa iloczynowi skalarnemu $|v_1 \cdot \overrightarrow{YX}|$, podobnie jest dla prostych BC, CD, AD. Z warunków zadania mamy, że różnica odległości wierzchołków A i B od wszystkich boków jest równa zeru. Zatem $\overrightarrow{AB} \cdot (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 0$, oraz $\overrightarrow{BC} \cdot (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 0$, czyli wektor $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ jest prostopadły do prostych AB i BC. Ponieważ AB i BC nie są równoległe, musi być $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$. Weźmy teraz dowolny punkt E, punkty E, $E + v_1$, $E + v_1 + v_2$, $E + v_1 + v_2 + v_3$ są wierzchołkami rombu ($E = E + v_1 + v_2 + v_3 + v_4$), a więc wektory v_1 i v_3 oraz v_2 i v_4 są równoległe, stąd $AB \| CD$ i $BC \| AD$.



Własność 1 szeregu harmonicznego.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Najprostszy (chyba) dowód tej własności jest taki:

załóżmy, że szereg ten jest zbieżny, tzn. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = h < \infty$; wówczas $h = (1+1/2) + (1/3+1/4) + (1/5+1/6) + \ldots > 2\cdot 1/2 + 2\cdot 1/4 + 2\cdot 1/6 + \ldots = h$ — sprzeczność.

W przytoczonym powyżej dowodzie skorzystaliśmy z pewnej własności szeregów zbieżnych — jakiej?

Wyjaśnimy teraz, dlaczego **Własność 1** można uznać za dziwną, sprzeczną z intuicją. Zauważmy, że wyraz ogólny szeregu harmonicznego, równy $\frac{1}{n}$, jest zbieżny do zera, ponadto sumy częściowe tego szeregu rosną bardzo wolno, tak wolno, że komuś, kto oblicza kolejne sumy 1, $1+1/2$, $1+1/2+1/3$, ... wydawać się może, że obliczone wartości zbliżają się do pewnej skończonej liczby. Wyliczono, że $1+1/2+\ldots+1/n \geqslant 100$ dopiero dla $n > 1{,}5\cdot 10^{43}$.

Własność 2 szeregu harmonicznego.

Ciąg $a_n = 1+1/2+\ldots+1/n - \ln n$ jest zbieżny (dowód tej własności nie jest trudny, można go znaleźć np. w „Rachunku różniczkowym i całkowym", t. II, G. M. Fichtenholza), jego granicę nazywa się stałą Eulera, oznacza się ją przez γ.

Wartość stałej Eulera z dokładnością do 10^{-10} wynosi 0,5772156649. Dla dostatecznie dużych n przybliżone wartości $\ln n$ można obliczać za pomocą sum częściowych szeregu harmonicznego. Stałą Eulera γ obliczono z dokładnością do 10^{-20800}, nie wiadomo jednak do tej pory, czy jest to liczba wymierna. Problem ten jest bardzo trudny.

Własność 3 szeregu harmonicznego.

Własność ta dotyczy szeregów, które powstają w ten sposób, że w szeregu harmonicznym skreśla się nieskończoną liczbę składników. Niech A będzie nieskończonym podzbiorem liczb naturalnych N. Przez h_A oznaczać będziemy szereg $\sum_{n\in A} \frac{1}{n}$, np. jeśli $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, to $h_A = 1/2+1/4+1/6+1/8+\ldots$.

Podstawowym pytaniem jest, czy szereg h jest zbieżny. Odpowiedź zależy od zbioru A, a w kilku przypadkach jest zaskakująca.

1° $A_0 = \{n \in N$: w zapisie dziesiętnym liczby n nie występuje cyfra $0\}$. W przypadku tym szereg h_{A_0} jest zbieżny, a dowód wygląda tak:
suma tych składników szeregu h_{A_0}, których mianowniki są jednocyfrowe, jest mniejsza od 9, suma tych składników h_{A_0}, których mianowniki są dwucyfrowe, jest mniejsza od $9^2/10$, itd., zatem

$$h_{A_0} < 9 + 9^2/10 + 9^3/10^2 + \ldots = 90.$$

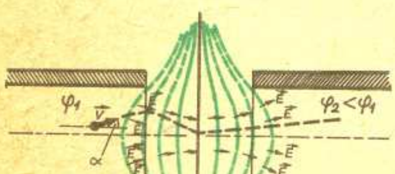
Nieznacznie modyfikując dowód można pokazać, że szereg h_{A_i} jest zbieżny, gdy $A_i = \{n \in N$: w zapisie dziesiętnym liczby n nie występuje cyfra $i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 9$. Obliczono wartości h_{A_i} z dość dużą dokładnością, tutaj podamy te wartości z dokładnością do 10^{-4}:

$$h_{A_0} = 23{,}1034,\ h_{A_1} = 16{,}1769,\ h_{A_2} = 19{,}2573,\ h_{A_3} = 20{,}5698,$$
$$h_{A_4} = 21{,}3274,\ h_{A_5} = 21{,}8346,\ h_{A_6} = 22{,}2055,\ h_{A_7} = 22{,}4934,$$
$$h_{A_8} = 22{,}7263,\ h_{A_9} = 22{,}9206.$$

Nie wiadomo, czy wartości $h_{A_0}, h_{A_1}, \ldots, h_{A_9}$ są liczbami wymiernymi.

2° $B_i = \{n \in N$: w zapisie dziesiętnym liczby n jest dokładnie i zer$\}$.
Szereg h_{B_0} i szereg h_{A_0} określony w przypadku **1°** są identyczne. Można pokazać, że $h_{B_0} > h_{B_1} > h_{B_2} \ldots$, wynika stąd, że szeregi $h_{B_0}, h_{B_1}, h_{B_2}, \ldots$ są zbieżne.
Pokażemy na przykład, że $h_{B_0} > h_{B_1}$:

Rozwiązanie zadania F 182. Rozważmy jon, którego prędkość tworzy pewien kąt z osią rury (rysunek). Równoległa do osi składowa pola elektrostatycznego powoduje przyspieszanie jonu w całym obszarze przecięcia w tym samym kierunku. Składowa prostopadła skierowana jest w pierwszej połowie przecięcia ku osi, a w drugiej połowie — od osi. Ponieważ w pierwszej połowie jon porusza się wolniej, czas działania siły skierowanej do osi jest dłuższy, a więc zmiana pędu jest większa niż w drugiej połowie. Wynika stąd, że całkowita zmiana pędu jonu przy przechodzeniu przecięcia jest skierowana do osi. Podobne soczewki stosuje się w akceleratorach.



$$h_{B_1} = (1/10+1/20+\ldots+1/90+1/110+1/120+\ldots)+$$
$$+(1/101+1/102+\ldots+1/201+1/202+\ldots)+(1/1011+$$
$$+1/1012+\ldots+1/2011+1/2012+\ldots)+\ldots<$$
$$(1/10)h_{B_0}+(9/100)h_{B_0}+(81/1000)h_{B_0}+\ldots = h_{B_0}.$$

3^0 Szereg $\sum_{p\in P} 1/p$ jest rozbieżny, gdzie P jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych.

Fakt ten udowodnił Euler. Dowód, który teraz przedstawimy, podał w 1966 roku Clarkson.

Niech $P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots\}$; załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$ jest zbieżny. Istnieje liczba naturalna k taka, że $\sum_{n=k}^{\infty} 1/p_n < 1/2$, zatem $\sum_{n=k}^{m} 1/p_n < 1/2$, gdzie $m \geqslant k$.

Oznaczmy przez s liczbę $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{k-1}$. Niech r będzie dowolną liczbą naturalną, można tak dobrać liczbę m, aby wszystkie dzielniki pierwsze liczb $1+s$, $1+2s$, ..., $1+rs$ były większe od p_{k-1} i nie większe od p_m. Zauważmy, że każdy składnik sumy $\sum_{n=1}^{r} 1/(1+ns)$, którego mianownik jest iloczynem j liczb pierwszych (niekoniecznie różnych), pojawia się w iloczynie $\left(\sum_{n=k}^{m} 1/p_n\right)^j < 2^{-j}$, stąd $\sum_{n=k}^{m} 1/(1+ns) < \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1$.

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż $\lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{r} 1/(1+ns) = \infty$ (jak to pokazać?).

4^0 Niech P' będzie zbiorem takich liczb pierwszych p, że liczba $p+2$ jest też pierwsza (takie liczby pierwsze p, $p+2$ nazywamy liczbami bliźniaczymi). W 1919 roku matematyk norweski Viggo Brun pokazał, że szereg $h_{P'}$ jest zbieżny. Jest to dość dziwny wynik, jeśli dodamy, że nie wiadomo, czy zbiór P' jest nieskończony. Nieskończoność zbioru P' jest jedną z najbardziej znanych hipotez teorii liczb.

5^0 $A = \{n \in N$: w zapisie dziesiętnym liczby n występują tylko cyfry parzyste$\}$,
$B = \{n \in N$: sąsiednie cyfry występujące w zapisie dziesiętnym liczby n są różne$\}$,
$C = \{n \in N$: n jest liczbą pierwszą i w jej zapisie dziesiętnym występuje przynajmniej jedna cyfra zero$\}$.
Szeregi h_A, h_B są zbieżne, szereg h_C jest rozbieżny. Dowody pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Z **własnością 3** szeregu harmonicznego wiąże się znane, nie rozwiązane dotąd, zagadnienie tzw. kombinatorycznej teorii liczb. Jest to hipoteza znakomitego matematyka węgierskiego Paula Erdösa. Brzmi ona tak:

Jeśli $A \subset N$ oraz szereg h_A jest rozbieżny, to dla dowolnej liczby naturalnej k istnieje w zbiorze A k-elementowy ciąg arytmetyczny.

Zagadnienie to jest bardzo trudne już choćby w szczególnym przypadku dla $A = P$, bowiem najdłuższy znany ciąg arytmetyczny złożony z liczb pierwszych ma 18 elementów (ciąg ten odkrył Pritchard). Aha, Erdös oferuje osobie, która udowodni jego hipotezę bądź poda kontrprzykład ją obalający, aż 3000 dolarów. Niebagatelna sumka, zatem do roboty!

Własność 4 szeregu harmonicznego.
Sumy częściowe s_2, s_3, s_4, ... szeregu harmonicznego nie są liczbami całkowitymi. Własność ta powinna być znana stałym Czytelnikom *Delty*, pojawiła się ona jako zadanie nr 1 w konkursie zadaniowym „Klub 44" (patrz numer 9 z 1981 roku), rozwiązanie można znaleźć w numerze 1 z 1982 roku. Można udowodnić następujące uogólnienie **własności 4**:
dla wszystkich k, $n \in N$ liczba $\pm 1/k \pm 1/(k+1) \pm \ldots \pm 1/(k+n)$ nie jest całkowita.

Myślę, że Czytelnicy *Delty* znają inne ciekawe własności szeregu harmonicznego, może niektórzy z Was sami coś w tej dziedzinie odkryli. Napiszcie do nas.

Pytanie od redakcji: Czy ślimak może zejść z wierzchołka bambusa?

Rozwiązanie zadania F 183. Korzystając z prawa Gaussa można wykazać, że natężenie pola elektrostatycznego między okładkami kondensatora cylindrycznego jest równe $E = \frac{C}{r}$, gdzie C — stała, a r — odległość od osi.
Oznaczmy przez x odchylenie jonu od podstawowego toru o promieniu r_0. Wówczas siła działająca na jon o ładunku q

$$F = \frac{Cq}{r_0+x}.$$

Rozważmy ruch jonu w układzie odniesienia wirującym wokół osi kondensatora z prędkością kątową ω równą prędkości kątowej jonu.
W tym nieinercjalnym układzie odniesienia na jon działa dodatkowo siła odśrodkowa $F_0 = m\omega^2(r_0+x)$, gdzie m — masa jonu.
Korzystając z zasady zachowania momentu pędu $m(r_0+x)^2\omega = mr_0^2\omega_0$ (ω_0 — początkowa prędkość kątowa jonu) możemy tę siłę zapisać w postaci

$$F_0 = m\omega_0^2 \frac{r_0^4}{(r_0+x)^3}$$

Ponieważ dla jonu krążącego po torze podstawowym $m\omega_0^2 r_0 = \frac{Cq}{r_0}$, siła elektrostatyczna ma postać $F = \frac{m\omega_0^2 r_0^2}{r_0+x}$.
Wypadkowa siła działająca na jon (zwrot dodatni od osi kondensatora)

$$F_w = F_0 - F = -\frac{m\omega_0^2 r_0^2}{(r_0+x)^3}(2xr_0+x^2).$$

Dla $x \ll r_0$ otrzymujemy $F_w = -2m\omega_0 x$.
Wynika stąd, że w kierunku radialnym jony drgają ruchem harmonicznym o okresie $T = \pi\sqrt{2}/\omega_0$. Wiązka zogniskuje się po czasie $T/2$ i zatoczy w tym czasie kąt $\omega_0 T/2 = \pi/\sqrt{2}$