Zadania z matematyki nr 115, 116

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

115. Niech a będzie dodatnim pierwiastkiem równania $x^2-x-1=0$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $[a^2n]=[a[an]]+1$. ([t] oznacza, jak zwykle, największą liczbę całkowitą $\leqslant t$.)

116. Liczby dodatnie a, b, 1 są różne. Czy wykresy funkcji wykładniczych $y=a^x$ i $y=b^x$, rozpatrywane jako podzbiory płaszczyzny, są figurami podobnymi?
Zadanie 116 przysłał pan Werner Mnich z Opola.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 107 /WT=2,57/ i 108 /WT=2,42/
z numeru 3/1985

Marcin Mazur	- Białystok	48,05pkt
Anna Gluza	- Toruń	43,93pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	41,77pkt
Marian Roman	- Ełk	41,28pkt
Tomasz Szymczyk	- Bielsko-B	40,97pkt
Grzegorz Kuś	- Kraków	39,93pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	39,08pkt

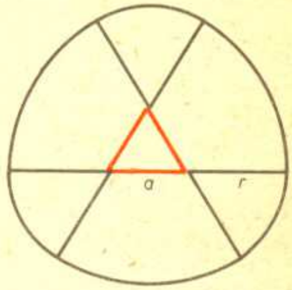
Pan Marcin Mazur jest trzydziestym piątym członkiem Klubu 44.

Rozwiązanie zadań z numeru 5/1985

Przypominamy treść zadań:

111. Czy istnieje w przestrzeni zbiór wypukły nie będący kulą, ograniczony powierzchnią mającą w każdym punkcie płaszczyznę styczną, przez którego każdy punkt przechodzi odcinek w nim zawarty, o długości równej jego średnicy?
112. Wykazać, że równanie $x^n+y^n=z^{2n+1}$ ma dla każdej liczby naturalnej n nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z.

111. Istnieje; oto przykład. Weźmy dowolne liczby dodatnie a i r, trójkąt równoboczny o boku długości a oraz przedstawioną na rysunku krzywą zamkniętą, leżącą w płaszczyźnie tego trójkąta, posklejaną z łuków okręgów o środkach w wierzchołkach trójkąta i o promieniach r oraz $a+r$. Jest to krzywa gładka (tj. mająca styczną w każdym punkcie); ogranicza ona zbiór płaski o stałej szerokości $a+2r$. Obracając ten zbiór wokół jednej z jego osi symetrii otrzymujemy bryłę obrotową, spełniającą warunki zadania.



112. Równanie spełniają na przykład liczby $x=y=2^{2kn+k+2}$, $z=2^{kn+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

Uniwersalny czy specjalizowany

Zarówno w przyrodzie, jak i w technice ewolucja przebiega w różnych kierunkach. Z jednej strony powstają układy uniwersalne, dysponujące „nadmiarem" możliwości, mocy lub inteligencji, zdolne do pracy w różnych, być może zmienionych, warunkach. Z drugiej strony istnieją też układy specjalizowane, dokładnie dopasowane do jednego konkretnego zastosowania lub środowiska (lub co najwyżej do niewielkiej ich grupy).

Układy specjalizowane są albo tańsze od układów uniwersalnych o takich samych możliwościach, albo mają większe możliwości od układów uniwersalnych o takiej samej cenie. Na przykład ciężarówka przeznaczona do jazdy po szosie w tropiku jest tańsza od pojazdu kołowo-gąsienicowego przeznaczonego do przewozu towarów i osób w dowolnym terenie i w dowolnych strefach klimatycznych.

Podobne trendy objawiają się w projektowaniu i produkcji komputerów. Ostatnio niesłychanie modne są uniwersalne mikroprocesory. Taki sam mikroprocesor może znaleźć zastosowanie w komputerze służącym głównie do gier, w komputerze obsługującym radar albo tomograf, a także w komputerze kierującym rakietą samosterującą. Dla usprawnienia pracy dołącza się jednak zazwyczaj dodatkowe, specjalizowane układy.

Na przykład mikrokomputer obsługujący radar musi szybko analizować widmo otrzymanego sygnału, a zatem przeprowadzić transformację Fouriera (algorytmem FFT, patrz *Delta* 12/1984). Kierowanie rakietą wymaga ciągłego porównywania obrazu terenu z zapamiętaną mapą — specjalizowany układ może to przyspieszyć. W mikrokomputerach domowych zazwyczaj wyspecjalizowane układy zajmują się wyświetlaniem informacji na ekranie. Odciąża to bardzo sam mikroprocesor.

Weźmy z kolei pod uwagę liczbę operacji arytmetycznych (na liczbach rzeczywistych) wykonywanych w czasie jednej sekundy. Najszybsze komputery uniwersalne wykonują do 30 milionów takich operacji (30 MFLOPS — ang. Mega Floating Point Operations Per Second). Znaczne zwiększenie szybkości komputerów wymagałoby opracowania zupełnie nowych technologii. Okazało się jednak, że w większości zagadnień wymagających wykonania dużej liczby operacji arytmetycznych (np. w algebrze liniowej) jest możliwe zastosowanie pewnych rozwiązań szczególnych. Można np. równolegle wykonywać jedną operację na kilkudziesięciu zestawach danych (wektorach). Udało się w ten sposób osiągnąć efektywną szybkość nawet rzędu 150 MFLOPS (superkomputer CRAY-1) w „tradycyjnej" technologii układów scalonych.

Innym przykładem jest pojemność pamięci zewnętrznych. Obecnie najczęściej korzysta się z pamięci na dyskach magnetycznych. Jednostka takiej pamięci zapamiętuje do kilkuset milionów bajtów (MB — Mega bajtów; jeden bajt odpowiada jednemu znakowi, a zatem 100 MB odpowiada 50 tys. stron maszynopisu). Jeśli trzeba zapamiętać więcej informacji, to można oczywiście połączyć wiele takich jednostek. Często jednak okazuje się, że duża część informacji nie będzie nigdy modyfikowana. Wówczas można je zapisać na dysku optycznym, działającym podobnie jak coraz popularniejszy „compact-disc". Dysk taki ma pojemność kilku miliardów bajtów (GB — Giga bajtów), a jego cena jest dziesięciokrotnie niższa od ceny typowego dysku magnetycznego o dużej pojemności.

J. D.