Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1985

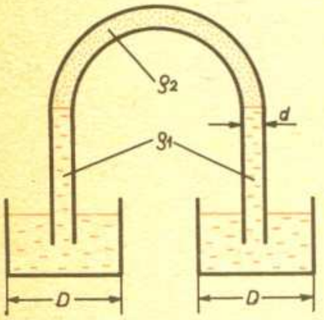
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Zadania z fizyki nr 13, 14



13. Czy układ przedstawiony na rysunku, w którym gęstość cieczy ϱ_2 jest większa od gęstości cieczy ϱ_1, może pozostawać w równowadze trwałej? Jeśli tak, to jaki warunek musi być spełniony? Jeżeli zaś nie, to dlaczego? D oraz d oznaczają odpowiednio średnice obu naczyń oraz średnicę (wewnętrzną) rurki.

14. Oszacować, co do rzędu wielkości, stosunek mocy promieniowania widzialnego padającego na dobrze oświetloną powierzchnię, na przykład stołu oświetlonego lampą, do mocy padającego na tę powierzchnię zrównoważonego promieniowania termicznego odpowiadającego temperaturze pokojowej. Ocenić, jakiego rzędu wielkości jest energia promieniowania zawarta w przestrzeni średniej wielkości pokoju. Niezbędne dane należy przyjąć samemu lub wziąć z tablic (żarówka elektryczna emituje w postaci promieniowania widzialnego około 1/30 mocy wydzielanej).

Rozwiązania zadań z numeru 5/1985

Przypominamy treść zadań:

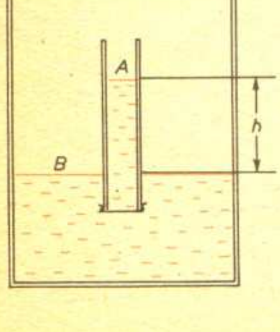
9. Znaleźć ciśnienie pary nasyconej (tzn. pozostającej w równowadze termodynamicznej z cieczą) nad powierzchnią cieczy, która zawiera rozpuszczoną substancję nielotną w ilości x moli na 1 mol cieczy ($x \ll 1$). Ciśnienie pary nasyconej nad czystą cieczą wynosi w tej samej temperaturze p_0.

10. W książkach fantastyczno-naukowych można niekiedy spotkać opisy bliźniaczej planety Ziemi, która porusza się po tej samej co Ziemia orbicie, lecz z przeciwległej strony Słońca. Jakie byłyby parametry optymalnej orbity pojazdu kosmicznego wysłanego z Ziemi na tę planetę?

9. Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku: środkowy cylinder, zawierający roztwór, zamknięty jest u dołu błoną nie przepuszczającą cząsteczek substancji rozpuszczonej i zanurzony w czystej cieczy; przestrzeń nad cieczą i roztworem wypełniona jest parą nasyconą. W warunkach równowagi ciśnienie p pary nasyconej nad powierzchnią roztworu (A) jest niższe od ciśnienia p_0 pary nasyconej nad powierzchnią czystej cieczy (B) o $\Delta p = \varrho_p g h$ (ϱ_p — gęstość pary nasyconej, g — przyspieszenie ziemskie). Różnica poziomów h jest spowodowana ciśnieniem osmotycznym p_{os}:

$$h = \frac{p_{os}}{\varrho_r g} \approx \frac{p_{os}}{\varrho_c g}$$

(ϱ_r — gęstość roztworu, ϱ_c — gęstość czystej cieczy).



Dla małych stężeń roztworu cząsteczki rozpuszczonej substancji (zakładamy, że nie dysocjuje ona w roztworze) można traktować jako gaz doskonały. Ciśnienie osmotyczne p_{os}, równe ciśnieniu wywieranemu przez ten gaz, obliczamy z równania Clapeyrona $p_{os} = cRT$ (c — stężenie roztworu w molach na jednostkę objętości, R — stała gazowa, T — temperatura bezwzględna). Z powyższych wzorów mamy

$$p = \frac{\varrho_p}{\varrho_c} cRT.$$

Ponownie korzystając z równania Clapeyrona wyznaczamy gęstość pary nasyconej

$$\varrho_p = \frac{\mu p_0}{RT}$$

(μ — masa cząsteczkowa cieczy). Z ostatnich dwóch wzorów wynika

$$\Delta p = \frac{\mu}{\varrho_c} c p_0 = x p_0$$

i w konsekwencji $p = (1-x)p_0$.

10. Poszukiwana orbita będzie wokółsłoneczną orbitą eliptyczną, styczną do orbity ziemskiej w miejscu wystrzelenia. W tym samym miejscu winno nastąpić spotkanie z planetą bliźniaczą. Okres obiegu będzie więc wynosił

$$T = (n+1/2)T_z \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \text{ gdzie } T_z = 1 \text{ rok}.$$

Z trzeciego prawa Keplera wyznaczamy średnią odległość od Słońca dla tej orbity:

$$a = a_z\left(\frac{T}{T_z}\right)^{2/3} = a_z\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2/3},$$

gdzie a_z — średnia odległość Ziemi od Słońca. Najkorzystniejsza energetycznie jest orbita dla $n = 0$, dla której $a = 0{,}63\,a_z$ i odległości od Słońca: w peryhelium — $0{,}26\,a_z$, w aphelium — a_z.

Zadania z matematyki nr 115, 116

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 107 /WT=2,57/ i 108 /WT=2,42/
z numeru 3/1985

Marcin Mazur	- Białystok	48,05pkt
Anna Gluza	- Toruń	43,93pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	41,77pkt
Marian Roman	- Ełk	41,28pkt
Tomasz Szymczyk	- Bielsko-B	40,97pkt
Grzegorz Kuś	- Kraków	39,93pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	39,08pkt

Pan Marcin Mazur jest trzydziestym piątym członkiem Klubu 44.

115. Niech a będzie dodatnim pierwiastkiem równania $x^2-x-1=0$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $[a^2n] = [a[an]]+1$. ($[t]$ oznacza, jak zwykle, największą liczbę całkowitą $\leqslant t$.)

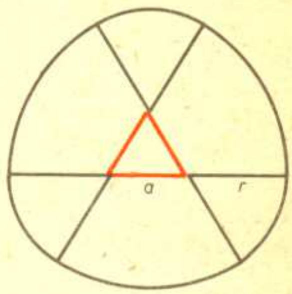
116. Liczby dodatnie a, b, 1 są różne. Czy wykresy funkcji wykładniczych $y = a^x$ i $y = b^x$, rozpatrywane jako podzbiory płaszczyzny, są figurami podobnymi?
Zadanie 116 przysłał pan Werner Mnich z Opola.

Rozwiązanie zadań z numeru 5/1985

Przypominamy treść zadań:

111. Czy istnieje w przestrzeni zbiór wypukły nie będący kulą, ograniczony powierzchnią mającą w każdym punkcie płaszczyznę styczną, przez którego każdy punkt przechodzi odcinek w nim zawarty, o długości równej jego średnicy?
112. Wykazać, że równanie $x^n+y^n = z^{2n+1}$ ma dla każdej liczby naturalnej n nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x, y, z.

111. Istnieje; oto przykład. Weźmy dowolne liczby dodatnie a i r, trójkąt równoboczny o boku długości a oraz przedstawioną na rysunku krzywą zamkniętą, leżącą w płaszczyźnie tego trójkąta, posklejaną z łuków okręgów o środkach w wierzchołkach trójkąta i o promieniach r oraz $a+r$. Jest to krzywa gładka (tj. mająca styczną w każdym punkcie); ogranicza ona zbiór płaski o stałej szerokości $a+2r$. Obracając ten zbiór wokół jednej z jego osi symetrii otrzymujemy bryłę obrotową, spełniającą warunki zadania.



112. Równanie spełniają na przykład liczby $x = y = 2^{2kn+k+2}$, $z = 2^{kn+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Uniwersalny czy specjalizowany

Zarówno w przyrodzie, jak i w technice ewolucja przebiega w różnych kierunkach. Z jednej strony powstają układy uniwersalne, dysponujące „nadmiarem" możliwości, mocy lub inteligencji, zdolne do pracy w różnych, być może zmienionych, warunkach. Z drugiej strony istnieją też układy specjalizowane, dokładnie dopasowane do jednego konkretnego zastosowania lub środowiska (lub co najwyżej do niewielkiej ich grupy).

Układy specjalizowane są albo tańsze od układów uniwersalnych o takich samych możliwościach, albo mają większe możliwości od układów uniwersalnych o takiej samej cenie. Na przykład ciężarówka przeznaczona do jazdy po szosie w tropiku jest tańsza od pojazdu kołowo-gąsienicowego przeznaczonego do przewozu towarów i osób w dowolnym terenie i w dowolnych strefach klimatycznych.

Podobne trendy objawiają się w projektowaniu i produkcji komputerów. Ostatnio niesłychanie modne są uniwersalne mikroprocesory. Taki sam mikroprocesor może znaleźć zastosowanie w komputerze służącym głównie do gier, w komputerze obsługującym radar albo tomograf, a także w komputerze kierującym rakietą samosterującą. Dla usprawnienia pracy dołącza się jednak zazwyczaj dodatkowe, specjalizowane układy.

Na przykład mikrokomputer obsługujący radar musi szybko analizować widmo otrzymanego sygnału, a zatem przeprowadzić transformację Fouriera (algorytmem FFT, patrz *Delta* 12/1984). Kierowanie rakietą wymaga ciągłego porównywania obrazu terenu z zapamiętaną mapą — specjalizowany układ może to przyspieszyć. W mikrokomputerach domowych zazwyczaj wyspecjalizowane układy zajmują się wyświetlaniem informacji na ekranie. Odciąża to bardzo sam mikroprocesor.

Weźmy z kolei pod uwagę liczbę operacji arytmetycznych (na liczbach rzeczywistych) wykonywanych w czasie jednej sekundy. Najszybsze komputery uniwersalne wykonują do 30 milionów takich operacji (30 MFLOPS — ang. Mega Floating Point Operations Per Second). Znaczne zwiększenie szybkości komputerów wymagałoby opracowania zupełnie nowych technologii. Okazało się jednak, że w większości zagadnień wymagających wykonania dużej liczby operacji arytmetycznych (np. w algebrze liniowej) jest możliwe zastosowanie pewnych rozwiązań szczególnych. Można np. równolegle wykonywać jedną operację na kilkudziesięciu zestawach danych (wektorach). Udało się w ten sposób osiągnąć efektywną szybkość nawet rzędu 150 MFLOPS (superkomputer CRAY-1) w „tradycyjnej" technologii układów scalonych.

Innym przykładem jest pojemność pamięci zewnętrznych. Obecnie najczęściej korzysta się z pamięci na dyskach magnetycznych. Jednostka takiej pamięci zapamiętuje do kilkuset milionów bajtów (MB — Mega bajtów; jeden bajt odpowiada jednemu znakowi, a zatem 100 MB odpowiada 50 tys. stron maszynopisu). Jeśli trzeba zapamiętać więcej informacji, to można oczywiście połączyć wiele takich jednostek. Często jednak okazuje się, że duża część informacji nie będzie nigdy modyfikowana. Wówczas można je zapisać na dysku optycznym, działającym podobnie jak coraz popularniejszy „compact-disc". Dysk taki ma pojemność kilku miliardów bajtów (GB — Giga bajtów), a jego cena jest dziesięciokrotnie niższa od ceny typowego dysku magnetycznego o dużej pojemności.

J. D.