a więc punkt s jest punktem odcinka $x'z'$. Ponieważ (znów z twierdzenia Talesa) $\varrho_S(z', z'') = \varrho_S(o, z''') = \varrho_S(o, t) = \varrho_S(z, s) < \varrho_S(z', x') = \varrho_S(x, z)$, więc

$$\varrho_S(x, z)+\varrho_S(z, y) > \varrho_S(z', z'')+\varrho_S(o, z') = \varrho_S(o, z'') = \varrho_S(x, y).$$

Wszystkie dotychczas ustalone własności ϱ_S mówią, że

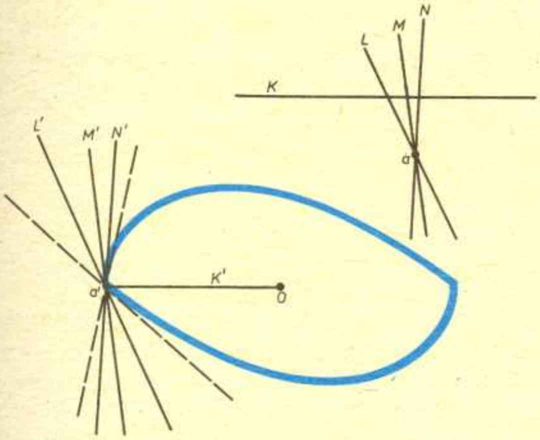
1° jest ona metryką (czyli sposobem mierzenia odległości) na płaszczyźnie,

2° jest przesuwalna,

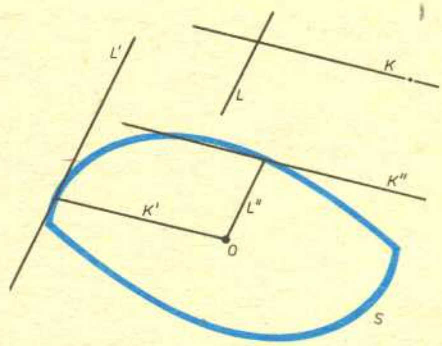
3° proste metryczne są zwykłymi prostymi (w dowolnie ustalonej metryce ϱ prosta metryczna wyznaczona przez punkty a i b, to zbiór wszystkich punktów spełniających warunek $\varrho(ax)+\varrho(xb) = \varrho(ab)$ lub $\varrho(xa)+\varrho(ab) = \varrho(xb)$ lub $\varrho(ab)+\varrho(bx) = \varrho(ax)$).

Jest to przykład metryki Minkowskiego, przy czym nie każda metryka Minkowskiego ma własność 3° (porównaj artykuł Z. Sawonia, a zwłaszcza przykłady z kwadratami).

Metryka, w szczególności ϱ_S, określa na płaszczyźnie geometrię. Pokażemy, że geometria wyznaczona przez obraną przez nas krzywą S różni się od geometrii euklidesowej.



W przestrzeni metrycznej mówimy, że prosta K przechodząca przez punkt p i przecinająca prostą L w punkcie q jest prostopadła do L ($K \perp L$), gdy odcinek pq jest najkrótszym spośród odcinków łączących p z L (mierzymy oczywiście za pomocą obranej metryki). Na rysunku widać, że prosta K jest prostopadła do każdej z prostych L, M, N, mimo że wszystkie one przechodzą przez punkt a (prostopadła w sensie metryki ϱ_S).



Kolejny rysunek pokazuje, że z $K \perp L$ nie wynika $L \perp K$ (znów w sensie metryki ϱ_S). Warto też zobaczyć, jak w przestrzeni z naszą metryką wyglądają różne figury. Czytelniku, spróbuj narysować trójkąt równoboczny, kwadrat i okrąg.

Można udowodnić, że geometria wyznaczona przez krzywą S jest geometrią euklidesową (czyli są w niej takie same twierdzenia) wtedy i tylko wtedy, gdy S jest elipsą. W szczególnym przypadku, gdy S jest okręgiem jednostkowym, ϱ_S jest zwykłą odległością.

dr hab. Marek KORDOS

Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 406. W czworościanie $ABCD$ wszystkie pary przeciwległych krawędzi są wzajemnie prostopadłe. Udowodnić, że środki wszystkich krawędzi leżą na jednej sferze.
Rozwiązanie na str. 16

M 407. Niech a i d będą liczbami naturalnymi. Wykazać, że w ciągu arytmetycznym a, $a+d$, $a+2d$, ... istnieje nieskończenie wiele liczb mających takie same dzielniki pierwsze.
Rozwiązanie na str. 16

M 408. W okręgu o promieniu 1 dana jest pewna liczba cięciw. Wykazać, że jeśli każda średnica przecina co najwyżej k cięciw, to suma długości wszystkich cięciw jest mniejsza od $k\pi$.
Rozwiązanie na str. 2

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 178. W stanie nieważkości unoszą się w zamkniętym naczyniu dwie jednakowe krople cieczy. Ciecz jest w równowadze termodynamicznej z własną parą nasyconą. Jakie zmiany zachodzić będą w układzie?
Rozwiązanie na str. 15

F 179. Co nastąpi po połączeniu rurką dwóch jednakowych baniek mydlanych?
Rozwiązanie na str. 14