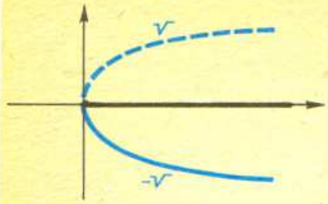
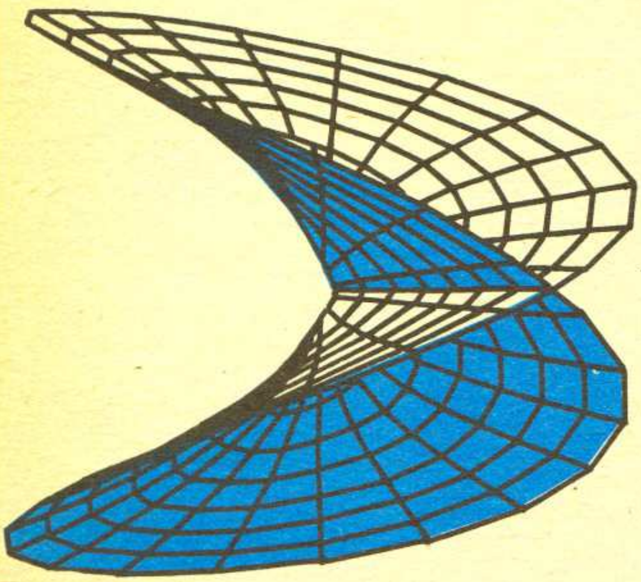
Powierzchnie Riemanna

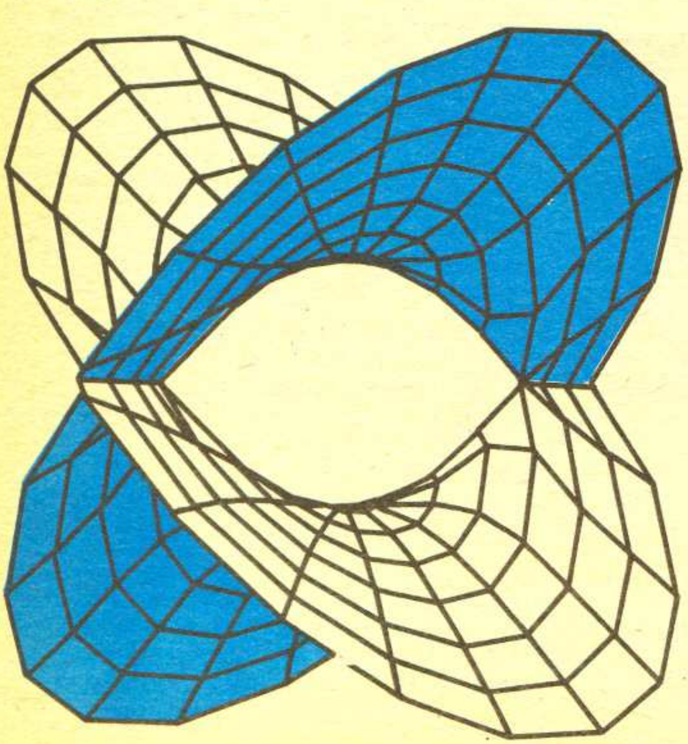
Dr Ryszard KOPIECKI



Rys. 1



Powierzchnie Riemanna powinniśmy rysować w przestrzeni czterowymiarowej, lecz tego nie potrafimy. Ich własności geometryczne można jednak poznać rysując w przestrzeni trójwymiarowej wykresy odpowiednich wieloznacznych funkcji rzeczywistych. W przypadku pierwiastka można rozpatrywać funkcję $z \to \mathrm{Re}\sqrt{z} + \mathrm{Im}\sqrt{z}$, gdzie ostatnia suma oznacza sumę wartości części rzeczywistej i urojonej pochodzących od tej samej gałęzi pierwiastka. Należy pamiętać, że otrzymana powierzchnia nie przecina się ze sobą, czego nie można było uniknąć na rysunku. Jednokrotne obiegnięcie wokół zera przenosi nas z jednego poziomu na drugi.



Oprócz operacji jednoznacznych (funkcji) występują w matematyce operacje wieloznaczne, dające dla ustalonej wartości argumentu nie jeden, lecz wiele wyników. Najprostszym przykładem takiej operacji jest pierwiastkowanie. Dla prostoty będziemy rozpatrywać pierwiastek kwadratowy. W przypadku liczb rzeczywistych wiemy, że dla każdej liczby dodatniej a istnieją dwa jej pierwiastki kwadratowe, czyli liczby rzeczywiste spełniające równanie $x^2 - a = 0$; oznaczamy je $-\sqrt{a}$, $\sqrt{a}$. Ten sam fakt ma miejsce, gdy a jest liczbą zespoloną (różną od zera) i rozpatrujemy rozwiązania tego równania w liczbach zespolonych.

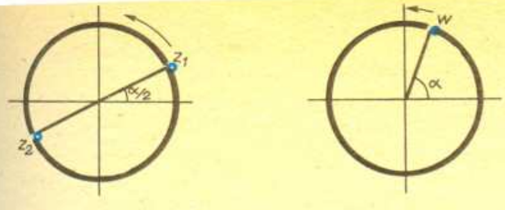
Istnieje jednak istotna różnica między przypadkiem rzeczywistym i zespolonym. Pierwiastki rzeczywiste różnią się znakiem. Pozwala to łatwo związać z operacją pierwiastkowania dwie funkcje ciągłe, tzw. gałęzie, określone na zbiorze liczb nieujemnych. Jedna z nich jest niedodatnia $(-\sqrt{\ })$, a druga nieujemna $(\sqrt{\ })$ (rys. 1). I mimo że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest różnowartościowa i jako taka nie może mieć funkcji odwrotnej, to jednak obie wydzielone gałęzie, $-\sqrt{\ }$ i $\sqrt{\ }$, są do niej odwrotne w tym sensie, że gdybyśmy dla dowolnej liczby nieujemnej obliczyli wartość którejkolwiek z nich i uzyskany wynik podnieśli do kwadratu, to otrzymalibyśmy z powrotem tę samą liczbę (czyli dla każdej $x \geqslant 0, f(-\sqrt{x}) = x$ i $f(\sqrt{x}) = x$). Jeśli składamy te operacje w odwrotnej kolejności, tzn. najpierw podnoszenie do kwadratu, a później pierwiastkowanie, to by otrzymać z powrotem argument, musimy wybrać odpowiednią gałąź pierwiastka, $-\sqrt{\ }$ lub $\sqrt{\ }$, w zależności od tego czy podnosiliśmy do kwadratu liczbę ujemną, czy dodatnią (tylko dla zera wybór gałęzi nie wpływa na wynik).

Jak w wyniku potęgowania umieścić informację pozwalającą wybrać odpowiednią gałąź pierwiastka? Najprościej jest obok wyniku umieścić wartość argumentu, tzn. zamiast funkcji $f(x) = x^2$ rozpatrywać przyporządkowanie $x \to (x, x^2)$, którego wartościami są pary liczb. Wówczas każda liczba dodatnia wystąpi na drugim miejscu dwukrotnie, raz w parze ze swoim pierwiastkiem ujemnym, raz z dodatnim. Funkcją odwrotną do takiego przyporządkowania jest rzutowanie na pierwszą oś $(x, x^2) \to x$. Zatem pierwiastkowanie byłoby operacją jednoznaczną (funkcją), gdyby je określić nie na zbiorze liczb nieujemnych (obrazie funkcji $f(x) = x^2$), lecz na zbiorze par postaci (x, x^2) (wykresie funkcji f, tj. paraboli $y = x^2$). Podnoszenie do kwadratu byłoby złożeniem dwóch funkcji $x \to (x, x^2) \to x^2$, z których druga jest rzutowaniem na drugą oś.

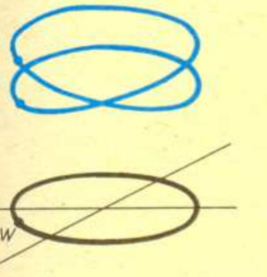
Przeniesienie dziedziny pierwiastkowania z półprostej na parabolę $x^2 - y = 0$ oznacza jakby podwojenie wszystkich argumentów (z wyjątkiem zera). Dopiero na takim zbiorze pierwiastkowanie staje się operacją jednoznaczną (funkcją). Zauważyli to Bernard Riemann i Karl Weierstrass, matematycy niemieccy dziewiętnastego wieku, a ich spostrzeżenie stało się początkiem ważnej i pięknej teorii tzw. powierzchni Riemanna. Lecz wartość tych idei można ocenić dopiero wtedy, gdy rozpatrujemy operacje i funkcje określone na liczbach zespolonych.

Rozpatrzmy funkcję zespoloną $f(z) = z^2$ określoną na liczbach zespolonych ($z \in \boldsymbol{C}$). Jej wykresem jest zbiór wszystkich par liczb zespolonych postaci (z, z^2), czyli powierzchnia określona równaniem $z^2 - w = 0$, leżąca w czterowymiarowej przestrzeni $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$. Pierwiastkowanie jest teraz funkcją o wartościach

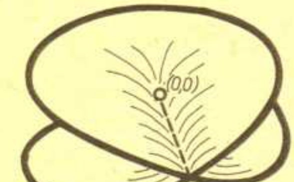
Powierzchnia wieloznacznej funkcji $z \to \mathrm{Re}\sqrt{z^2-1} + \mathrm{Im}\sqrt{z^2-1}$, odpowiadająca powierzchni Riemanna funkcji $\sqrt{z^2-1}$. Punktami osobliwymi są -1 i 1. Obiegnięcie każdego z nich z osobna powoduje przemieszczanie się w górę lub w dół, podczas gdy obiegnięcie obu tego nie powoduje.



Rys. 2



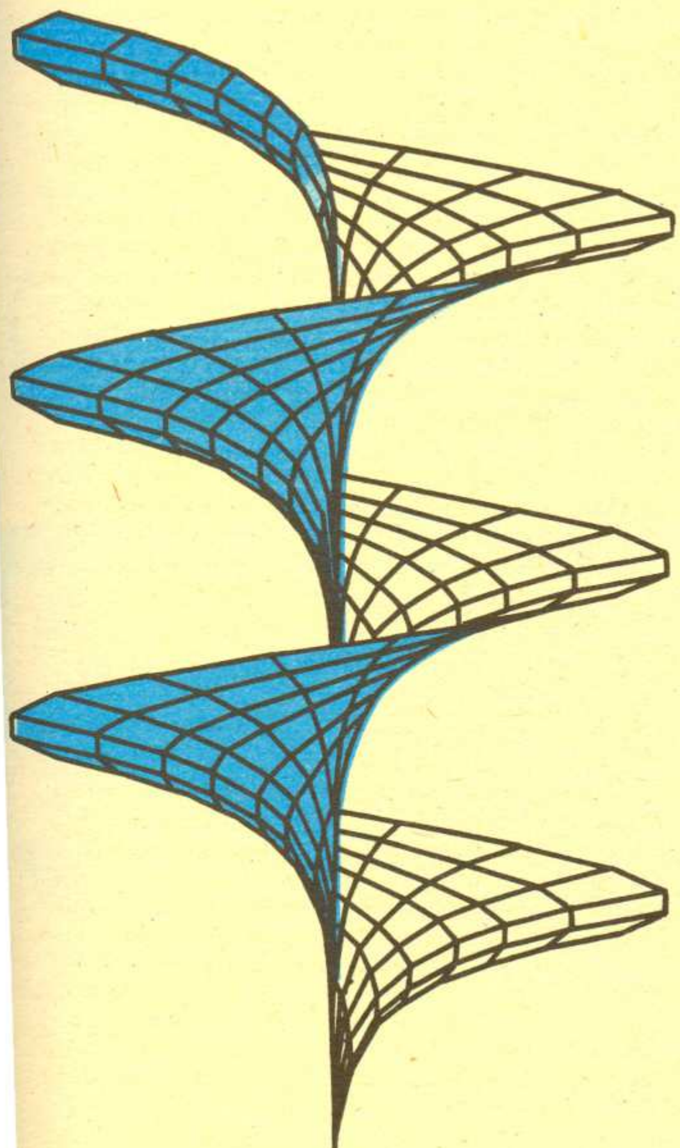
Rys. 3



Rys. 4

Rysunki powierzchni Riemanna wykonał *Michał JANKOWSKI* (Instytut Informatyki UW) na komputerze Mera 400.

zespolonych $(z, z^2) \to z$. Dla poznania jej własności potrzebna jest znajomość budowy powierzchni $z^2 - w = 0$.
Niech $w \neq 0$ będzie liczbą zespoloną. We współrzędnych kartezjańskich możemy ją zapisać jako parę liczb postaci $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, gdzie $r = |w|$ jest jej odległością od zera oraz α jest kątem skierowanym, który tworzy wektor $\overrightarrow{Ow}$ z półosią liczb rzeczywistych nieujemnych. Pierwiastki kwadratowe liczby w to liczby zespolone $z_1 = \left(\sqrt{r}\cos\frac{\alpha}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ i $z_2 = \left(\sqrt{r}\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right), \sqrt{r}\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$, położone symetrycznie na okręgu o promieniu $\sqrt{r}$ i środku w zerze. Gdy punkt w obiega okrąg o równaniu $|w| = r$, wówczas pierwiastki z_1 i z_2 poruszają się po okręgu $|z| = \sqrt{r}$ z prędkością kątową dwukrotnie mniejszą (rys. 2). Gdy w dokona pełnego obrotu, punkty z_1 i z_2 wykonają po pół obrotu, czyli zamienią się miejscami. Po dwóch obrotach w punkty z_1 i z_2 powrócą na swoje miejsca. Uniemożliwia to rozróżnienie pierwiastków tak, jak to było możliwe w przypadku liczb rzeczywistych.
Budowa powierzchni $z^2 - w = 0$ staje się teraz zrozumiała. Nad każdym punktem w płaszczyźnie zmiennej w leżą dwa punkty powierzchni, (z_1, w) i (z_2, w), przy czym ich pierwsze współrzędne to pierwiastki kwadratowe liczby w. Gdy w przebiega okrąg $|w| = r$, punkty (z_1, w) i (z_2, w) poruszają się po pewnej pętli leżącej na rozpatrywanej powierzchni w ten sposób, że moduł pierwszej współrzędnej pozostaje stały, równy $\sqrt{r}$. Przedstawia to rysunek 3, przy czym należy pamiętać, że pętla ta nie ma punktów samoprzecięcia, gdyż dla każdej $w \neq 0$ istnieją dwa (różne) pierwiastki kwadratowe. Rozpatrując dowolne wartości $r > 0$ dochodzimy do wniosku, że powierzchnia $z^2 - w = 0$ składa się jakby z dwóch płatów, przeplecionych ze sobą w ten sposób, że aby przejść z jednego na drugi, trzeba obiec jednokrotnie punkt $w = 0$. Rysunek 4 pomaga to sobie wyobrazić, lecz należy pamiętać, że nasza powierzchnia nie przecina się ze sobą (punkty na kreskowanej linii należy rozdwoić) i takie położenie jej jest możliwe dopiero w przestrzeni czterowymiarowej, gdzie w istocie (jako wykres funkcji $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = z^2$) powinna być umieszczona.
Punkt (0, 0) jest jedynym punktem powierzchni, którego druga współrzędna jest zero. Wyraża to własność, że jedynym pierwiastkiem zera jest zero. Jest też jedynym punktem, którego obieganie powoduje przemieszczenie się z jednego płata na drugi. Pod wieloma względami punkt ten różni się od pozostałych: jest osobliwy. Jego osobliwość powodowana jest faktem, że operacja pierwiastkowania nie jest różniczkowalna w zerze. Pomimo tego punkty osobliwe są bardziej interesujące od pozostałych (regularnych), gdyż więcej mówią o własnościach rozpatrywanej powierzchni.
Omówiliśmy budowę jednej z najprostszych powierzchni Riemanna, powierzchni pierwiastka kwadratowego. Można zapytać, co zyskaliśmy dzięki ujednoznacznieniu operacji wieloznacznych przenosząc ich dziedziny na skomplikowane powierzchnie. Przede wszystkim stały się funkcjami, które w punktach regularnych swoich powierzchni mają te same istotne własności co funkcje do nich odwrotne. Możemy wykonywać na nich wszystkie działania, jakie wykonujemy na funkcjach. Trudności w wykonaniu takich działań na operacjach wieloznacznych łatwo odczujemy próbując poprawnie zdefiniować np. sumę pierwiastków liczb zespolonych. Ponadto wciąż żywe idee Riemanna i Weierstrassa ułatwiły wprowadzenie do teorii funkcji metod geometrycznych, dzięki którym uzyskano szereg nowych i głębokich wyników.



Tak zazwyczaj wyobrażamy sobie powierzchnię Riemanna logarytmu. Rysunek przedstawia wieloznaczną funkcję rzeczywistą będącą sumą części rzeczywistej i urojonej logarytmu. Punkt 0 jest osobliwy, lecz nieco innego typu niż punkty 0, -1 i 1 w poprzednich przykładach. Obieganie po tej powierzchni zera w ustalonym kierunku nigdy nie spowoduje powrotu do punktu wyjściowego (taką osobliwość nazywamy osobliwością typu logarytmicznego).