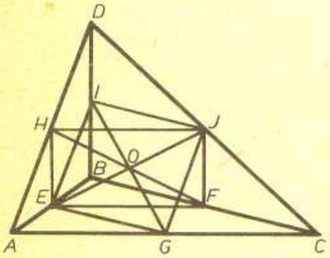
Rozwiązanie zadania M 407. Można założyć, że liczby a i d są względnie pierwsze oraz $a \geqslant 2$ (w przeciwnym przypadku wszystkie wyrazy ciągu można podzielić przez największy wspólny dzielnik a i d i odrzucić ewentualną jedynkę na początku). Rozważmy ciąg $a, a^2, a^3, \ldots$. Znajdują się w nim dwie liczby a^s i a^t $(s < t)$ dające taką samą resztę przy dzieleniu przez d. Różnica $a^t - a^s = a^s(a^{t-s} - 1)$ dzieli się przez d. Ponieważ a i d są względnie pierwsze, to $a^{t-s} - 1$ dzieli się przez d. Niech $k = t - s$. Dla dowolnej liczby naturalnej n: liczba $a^{km+1} - a = a(a^{t-s} - 1)(a^{k(m-1)} + a^{k(m-2)} + \ldots + 1)$ dzieli się przez d, czyli $a^{km+1} = a + nd$, dla pewnej liczby naturalnej n, a więc a^{km+1} występuje w danym ciągu. Wszystkie liczby postaci a^{km+1} mają oczywiście takie same dzielniki pierwsze jak a.

Rozwiązanie zadania M 406. Oznaczmy środki krawędzi AB, BC, AC, AD, BD, CD odpowiednio przez E, F, G, H, I, J. Mamy $EF \| AC$, $HJ \| AC$, $EH \| BD$, $FJ \| BD$ i $AC_{\Delta}\, BD$, a więc $EF \| HJ$, $EH \| FJ$ i $\sphericalangle HEF = \frac{\pi}{2}$.



Czworokąt $EFJH$ jest prostokątem. Niech O będzie punktem przecięcia EJ i FH. Wówczas $OE = OF = OJ = OH$. W podobny sposób rozważając czworokąt $EGJI$ otrzymujemy równości $OE = OG = OJ = OI$.

Paradoks parkowania

Dr Bogdan CICHOCKI

W *Delcie* 8/1982 opisano m.in. jeden z klasycznych paradoksów fizyki statystycznej tzw. paradoks odwracalności i jego wyjaśnienie zaproponowane przez Ludwika Boltzmanna. Przypomnijmy pokrótce, w czym rzecz. Otóż paradoks odwracalności wiąże się z pewną trudnością, którą napotykamy przy próbie wyjaśnienia własności ciał makroskopowych (np. gazów) w oparciu o prawa rządzące ruchem atomów i cząsteczek. Trudnością tą jest sprzeczność między nieodwracalnością w czasie zjawisk makroskopowych (np. rozpływanie się kropli atramentu w szklance wody) a odwracalnością zjawisk mikroskopowych (obserwując ruchy cząsteczek nie jesteśmy w stanie wyróżnić kierunku upływu czasu). Rozwikłanie przez Boltzmanna tej, jak się okazuje, pozornej sprzeczności opiera się na stwierdzeniu dwóch podstawowych faktów. Po pierwsze formułując omawiany paradoks wprowadziliśmy dwa poziomy opisu stanu układu: jeden bardzo dokładny (mikroskopowy) i drugi dużo mniej dokładny (makroskopowy). Po drugie jeden ze stanów makroskopowych (tzw. stan równowagowy) jest realizowany przez ogromną większość możliwych do wyobrażenia sytuacji mikroskopowych, zaś inne (tzw. stany nierównowagowe) przez stosunkowo niewielką liczbę takich sytuacji. W tym właśnie tkwi źródło asymetrii w czasie zjawisk makroskopowych. Bowiem układ znajdujący się w stanie nierównowagowym ze względu na to, że położenia i prędkości atomów i cząsteczek stale się zmieniają, po pewnym czasie przejdzie do stanu równowagi i praktycznie na stałe w nim pozostanie. Czytelnika, który chciałby bardziej szczegółowo zapoznać się z rozumowaniem Boltzmanna, odsyłam do wspomnianego artykułu z drobnym zastrzeżeniem — rysunki tam zamieszczone zostały zniekształcone w toku produkcji czasopisma.

Zrozumienie istoty paradoksu odwracalności i jego wyjaśnienia podanego przez Boltzmanna jest jednym z warunków zrozumienia podstaw fizyki statystycznej. W zrozumieniu tym może być pomocna analiza pewnej sytuacji znanej każdemu kierowcy.

Bardzo często, aby zaparkować samochód, zmuszeni jesteśmy ustawić go między dwoma innymi, blisko stojącymi samochodami. Każdy kierowca (szczególnie początkujący) wie, że jest to manewr dość trudny; na pewno trudniejszy niż manewr odwrotny, tzn. wyjechanie ze wspomnianego miejsca parkowania. Dlaczego? Przecież samochód może jechać po tej samej trasie zarówno do przodu, jak i do tyłu. Możemy w tym przypadku mówić o paradoksie parkowania. Zauważmy, że jest on analogiczny do paradoksu odwracalności dla ciał makroskopowych. Pomimo symetrii ruchu samochodu (odpowiadającej odwracalności mikroskopowych ruchów cząsteczek) obserwujemy asymetrię między opisanymi powyżej manewrami (odpowiadającą nieodwracalności procesów makroskopowych). Wyjaśnienie paradoksu parkowania jest dokładnie takie samo, jak wyjaśnienie paradoksu odwracalności podane przez Boltzmanna. Na początek zauważmy, że możemy wyróżnić dwa poziomy opisu położenia samochodu. Pierwszym jest opis „mikroskopowy", w którym podajemy dokładnie położenie samochodu na jezdni. W tym przypadku będziemy mówić o „mikrostanie" samochodu. W drugim opisie (o wiele mniej dokładnym) wyróżniamy tylko dwie sytuacje („makrostany") i podajemy, w której z nich samochód się znajduje. Te dwie sytuacje to: (1) samochód zaparkowany i (2) samochód poza miejscem parkowania. Zauważmy teraz, że (podobnie jak w przypadku stanu równowagi i stanów nierównowagowych) występuje istotna różnica między „makrostanami" (1) i (2). Stan (1) może być bowiem zrealizowany praktycznie przez jeden „mikrostan" samochodu, gdy tymczasem stan (2) przez bardzo dużą liczbę tych „mikrostanów". W związku z tym wyjechać samochodem z miejsca parkowania, tzn. przeprowadzić go z (1) do (2) jest łatwo. Możliwych jest wiele różnych realizacji tego procesu. Tymczasem sytuacja z manewrem odwrotnym przedstawia się zupełnie inaczej. Startujemy bowiem wtedy z pewnego położenia na jezdni i musimy trafić do „makrostanu" (1). A to jest trudne, gdyż makrostanowi temu odpowiada tylko jeden „mikrostan". Mam nadzieję, że ten przykład pozwoli Czytelnikom lepiej zrozumieć rozwikłanie paradoksu odwracalności podane przez Boltzmanna ponad sto lat temu.