**Rozwiązania zadań z numeru 4/1985**

Przypominamy treść zadań:

**109.** Znaleźć wszystkie wielomiany (jednej zmiennej) o współczynnikach równych $\pm 1$, mające wyłącznie pierwiastki rzeczywiste.

**110.** Dowieść, że jeśli w sześciokącie wypukłym wszystkie kąty mają tę samą rozwartość, to sumy długości boków wychodzących z przeciwległych wierzchołków są równe.

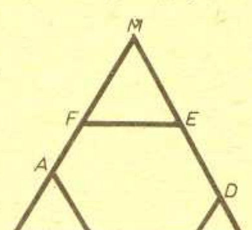
7. Jednorodną, cienką obręcz o masie $m$ i promieniu $r$ wprawiono w ruch ślizgowy po poziomym, płaskim podłożu z początkową prędkością środka masy $v_0$, nadając jej jednocześnie prędkość kątową $\omega_0$ wirowania w płaszczyźnie pionowej tak, jak to przedstawia rysunek. Jakie warunki muszą być spełnione, aby obręcz wróciła do punktu startowego? Zakładamy, że podłoże jest jednorodne.

8. Podczas słonecznego poranka, gdy trawa pokryta jest jeszcze rosą, można zaobserwować ciekawe zjawisko: spoglądając na swój cień na trawie widzi się aureolę wokół głowy, podczas gdy reszta własnego cienia jest jej pozbawiona. Wyjaśnić to zjawisko.

**109.** Przypuśćmy, że wielomian $w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, w którym $|a_k| = 1$ $(k = 0, \ldots, n)$, $n \geq 2$, ma $n$ pierwiastków rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ (niekoniecznie różnych). Z wzorów Viète'a mamy $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| = |a_{n-1}| = 1$, $\left|\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} x_i x_j\right| = |a_{n-2}| = 1$, $\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = |a_0| = 1$.

Pierwszą z tych trzech równości podnosimy stronami do kwadratu wykorzystując równość drugą: $1 = \left(\sum x_i\right)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum_{i>j} x_i x_j = \sum x_i^2 \pm 2$, a ponieważ $\sum x_i^2 \geq 0$, więc musi być $\sum x_i^2 = 3$. Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $x_i^2$ mamy zatem $3/n = \sum x_i^2/n \geq \left(\prod x_i^2\right)^{1/n} = \left|\prod x_i\right|^{2/n} = 1$, skąd $n \leq 3$. Gdy $n = 3$, nierówność przechodzi w równość, czyli wszystkie $x_i^2$ są równe: $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$; stąd i z równości $\left|\sum x_i\right| = 1$ wnosimy, że dwie spośród liczb $x_1$, $x_2$, $x_3$ równają się 1, a jedna $-1$, lub odwrotnie. Daje to wielomiany trzeciego stopnia $\pm(x-1)^2(x+1) = \pm(x^3-x^2-x+1)$ oraz $\pm(x+1)^2(x-1) = \pm(x^3+x^2-x-1)$. Gdy $n<3$, $w$ jest wielomianem liniowym lub kwadratowym. Bezpośrednim sprawdzeniem przekonujemy się, że warunki zadania spełniają wielomiany $\pm(x^2-x-1)$, $\pm(x^2+x-1)$, $\pm(x-1)$, $\pm(x+1)$, $\pm 1$.

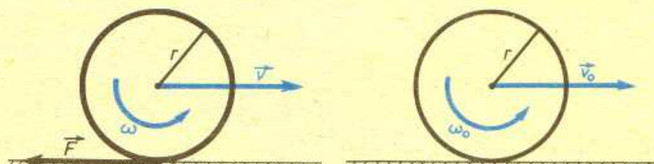
**110.** Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem wypukłym, w którym wszystkie kąty mają rozwartość 120°. Na bokach $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, na zewnątrz sześciokąta, budujemy trójkąty równoboczne $AKB$, $CLD$, $EMF$ (rysunek). Powstaje trójkąt równoboczny $KLM$.




Pokażemy, że sumy długości boków sześciokąta wychodzących z wierzchołków $B$ i $E$ są równe: $AB+BC = KB+BC = KC = KL-CL = LM-LD = DM = DE+EM = DE+EF$.

**7.** Powrót obręczy jest możliwy dzięki sile tarcia, działającej na obręcz ze strony podłoża podczas jej poślizgu. Siła ta ma wartość $F = fmg$ ($f$—współczynnik tarcia, g—przyspieszenie ziemskie). Po czasie $t_1$, spełniającym równanie $Ft_1 = mv_0$, nastąpi zatrzymanie ruchu postępowego obręczy, a jej prędkość kątowa zmaleje do $\omega_1$. Spełnione przy tym będzie równanie $Frt_1 = I(\omega_0-\omega_1)$, gdzie $I = mr^2$ jest momentem bezwładności obręczy względem jej środka. Ponieważ $F = \text{const}$, omawiany ruch odbywa się ze stałym przyspieszeniem $a = -\frac{F}{m} = -fg$.

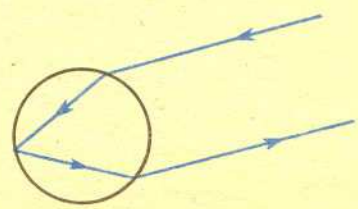
Stąd obliczamy $t_1 = \frac{v_0}{-a} = \frac{v_0}{fg}$.




Warunkiem powrotu obręczy do punktu startowego jest $\omega_1 > 0$. Ponieważ z równań powyższych wynika $\omega_0 - \omega_1 = \frac{v_0}{r}$, warunek ten przyjmuje postać $\omega_0 > \frac{v_0}{r}$.

Oczywiście musi zachodzić $f > 0$ (tarcie toczne pomijamy).

**8.** Rosa to kropelki wody, które nie zwilżają liści trawy; często osiadają one na drobnych włoskach tuż nad powierzchnią liścia. Taka kropla działa jak soczewka, skupiając raz promienie słoneczne na liściu, a następnie ponownie światło odbite od liścia skupia w prawie równoległą wiązkę wsteczną. Dzięki temu odbicie światła słonecznego od pokrytej rosą trawy ma wyraźne maksimum w kierunku padania światła. Dla obserwatora rejony graniczące z cieniem głowy są znacznie jaśniejsze, gdyż dla nich promienie odbite w kierunku oka tworzą niewielki kąt z padającymi promieniami słonecznymi. Zjawisko kierunkowego odbicia wstecznego może być również związane z odbiciem od tylnej powierzchni kulistej kropli, jak na rysunku. Zachodzi ono jednak przy wyższych, aniżeli ma woda, współczynnikach załamania światła $(\sqrt{2} < n \leq 2)$.



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44M"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 105 /WT=2,47/ i 106 /WT=2,35/ z numeru 2/1985

| | | |
|---|---|---|
| Krystyna Witek | - Ostrów Maz. | 44,90pkt |
| Marcin Mazur | - Białystok | 43,30pkt |
| Anna Gluza | - Toruń | 42,48pkt |
| Jacek Mańdziuk | - Lublin | 41,77pkt |
| Marian Roman | - Ełk | 41,28pkt |
| Tomasz Szymczyk | - Bielsko-B. | 40,97pkt |
| Grzegorz Kuś | - Kraków | 39,93pkt |

Serdecznie witamy panią Krystynę Witek, drugą Panią w Klubie 44.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1985

## Zadania z matematyki nr 113, 114

**113.** W przestrzeni dana jest płaszczyzna $\pi$ oraz dwa punkty $A$ i $B$ leżące poza tą płaszczyzną, po tej samej stronie. Niech $Z$ będzie zbiorem tych punktów $M$, dla których istnieje sfera o środku $M$, przechodząca przez $A$ i $B$, styczna do $\pi$. Udowodnić, że $Z$ jest elipsą lub parabolą.

**114.** Dany jest ciąg liczb dodatnich $(a_n)$. Niech $x_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n}$. Dowieść, że dla każdej pary liczb naturalnych $n$, $m$ zachodzi nierówność $a_{n+1} + \ldots + a_{n+m} \geqslant (n+m)x_{n+m} - nx_n$.

Zadanie 114 przysłał pan Ryszard Mazurek z Wrocławia.

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

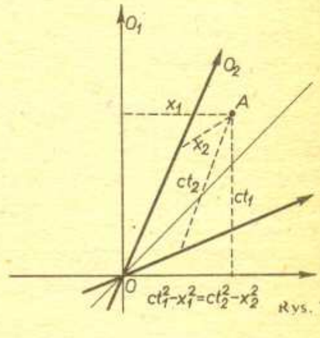
## Zadania z fizyki nr 11, 12

**11.** W środku prostopadłościennej gablotki znajduje się przedmiot z cennego kruszcu, zawieszony na lekkiej, wiotkiej sprężynie, która jest zaczepiona do górnej ścianki. Zaproponować metody doświadczalne wyznaczenia masy tego przedmiotu, które by wykluczały jego zetknięcie się ze ściankami gablotki. Wszystkie ścianki są wykonane z takiej samej przezroczystej płyty, gęstość kruszcu nie jest znana.

**12.** Przyjmując, że potencjał górnej warstwy atmosfery, na wysokości 50 km, względem powierzchni Ziemi wynosi + 400 kV, a pionowy gradient potencjału przy powierzchni Ziemi ma średnią wartość 100 V/m, obliczyć przybliżone wartości całkowitego ładunku elektrycznego kuli ziemskiej oraz całkowitego ładunku zawartego w atmosferze ziemskiej, podać znaki tych ładunków. Promień Ziemi wynosi ~6400 km.

# 7. Interwał czasoprzestrzenny

Obserwator inercjalny, posługując się układem współrzędnych w czasoprzestrzeni, może określić czas i miejsce dowolnego zdarzenia. Ilościowe porównywanie wyników obserwacji prowadzonych przez różnych obserwatorów jest możliwe pod warunkiem, że znamy związek między skalami na osiach ich układów współrzędnych. Aby ustalić ten związek, znajdziemy, dla dowolnej pary zdarzeń, wielkość zależną od współrzędnych tych zdarzeń, która dla każdego obserwatora ma tę samą wartość (tzw. niezmiennik).



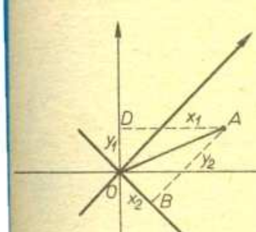
Rys. 7b

Punkt w przestrzeni euklidesowej ma inne współrzędne w każdym z obróconych względem siebie układów współrzędnych kartezjańskich. Odległości między punktami nie zależą jednak od układu. Odległość jest więc niezmiennikiem obrotów (rys. 7a).

W dwuwymiarowej czasoprzestrzeni odpowiednikiem obrotu jest zmiana obserwatora inercjalnego, a niezmiennikiem wielkość

$$(*) \qquad s^2 = c^2t_1^2 - x_1^2 = c^2t_2^2 - x_2^2,$$

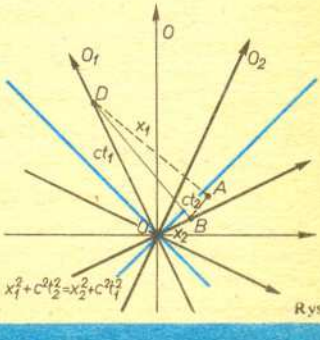
zwana interwałem czasoprzestrzennym (rys. 7b).



Rys. 7a

Udowodnimy wzór (*). Załóżmy, że dwóch obserwatorów $\mathbf{0}_1$ i $\mathbf{0}_2$ rejestruje zdarzenie $A$. Dodatkowo wybierzmy obserwatora $\mathbf{0}$ tak, by prędkości, z którymi poruszają się względem niego $\mathbf{0}_1$ i $\mathbf{0}_2$, miały te same wartości i były przeciwnie skierowane (rys. 7c). Można łatwo wykazać, że taki wybór $\mathbf{0}$ jest zawsze możliwy.

Na rysunku 7c obserwatorowi $\mathbf{0}$ przypisaliśmy prostokątny układ współrzędnych. Dlatego oś czasu obserwatora $\mathbf{0}_1$ jest prostopadła do osi odległości $\mathbf{0}_2$, a oś odległości $\mathbf{0}_2$ prostopadła do osi czasu $\mathbf{0}_1$.



Rys. 7c