Ciała cechujące i elipsoidy

Dr Zbigniew SAWOŃ

Jak pewnie Czytelnikowi wiadomo, w skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej $\boldsymbol{R}^k$ można wprowadzić na wiele sposobów metrykę. Z punktu widzenia Analizy Funkcjonalnej najistotniejsze są te metryki, które określone są przez normę jednorodną i tymi też metrykami zajmiemy się w tym artykule.

Funkcja $\|\cdot\|:\boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}$ nazywa się normą jednorodną, jeżeli
1. $\|x\| \geqslant 0$ i $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \boldsymbol{0}$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ dla każdych $x \in \boldsymbol{R}^k$ i $\lambda \in \boldsymbol{R}$,
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ dla każdych $x, y \in \boldsymbol{R}^k$.

Przykłady norm będą podane w dalszej części artykułu.

Za pomocą normy można następującym wzorem zdefiniować metrykę

$$\varrho(x, y) \overset{\mathrm{df}}{=} \|x - y\| \text{ dla } x, y \in \boldsymbol{R}^k.$$

Czytelnik z łatwością sprawdzi, że funkcja ta ma wszystkie własności metryki, a poza tym jeszcze dwie dodatkowe:
(i) $\varrho(x + x_0, y + x_0) = \varrho(x, y)$ dla każdego $x_0 \in X$ (tzn. jest przesuwalna),
(ii) $\varrho(\lambda x, \lambda y) = \lambda\varrho(x, y)$ dla każdego $\lambda \geqslant 0$, $x, y \in X$
(w przypadku, gdy $k = 2$ i przy „zwyczajnej" odległości na płaszczyźnie jest to twierdzenie Talesa).

Łatwo zauważyć, że gdy metryka ϱ spełnia warunki (i) oraz (ii), to wyznacza normę jednorodną daną wzorem

$$\varrho(x, \boldsymbol{0}) \overset{\mathrm{df}}{=} \|x\|.$$

Jeżeli w przestrzeni $\boldsymbol{R}^k$ określona jest norma jednorodna $\|\ \|$, to parę $(\boldsymbol{R}^k, \|\ \|)$ nazywamy k-wymiarową przestrzenią liniową unormowaną. Powstaje zasadnicze pytanie: Jak konstruować w przestrzeni $\boldsymbol{R}^k$ normy jednorodne?

Przyjrzyjmy się trochę dokładniej zbiorowi
$W_0 = \{x: \|x\| \leqslant 1\} = \overline{K}(\boldsymbol{0}, 1)$ (domknięta kula jednostkowa względem normy $\|\ \|$).

Zbiór ten ma następujące własności:
1. W_0 jest zbiorem wypukłym,
2. $\boldsymbol{0} \in W_0$ oraz $\boldsymbol{0}$ jest środkiem symetrii W_0 (tzn. $x \in W_0 \Rightarrow -x \in W_0$),
3. dla każdego $x \in \boldsymbol{R}^k$ istnieje $t > 0$ takie, że $tx \in W_0$ (W_0 jest zbiorem pochłaniającym),
4. jeżeli $x_0 \in W_0$ i dla każdego $t > 0$ jest $tx_0 \in W_0$, to $x_0 = \boldsymbol{0}$ (W_0 nie zawiera półprostych).

Jeżeli $W \subset \boldsymbol{R}^k$ spełnia warunki 1, 2, 3, 4, to W nazywa się ciałem cechującym. Zatem $\overline{K}(\boldsymbol{0}, 1)$ jest ciałem cechującym. Zachodzi też twierdzenie w pewnym sensie odwrotne, a mianowicie

Jeżeli $W \subset \boldsymbol{R}^k$ jest ciałem cechującym, to wzór

$$p_W(x) = \inf\left\{t > 0: \frac{1}{t}x \in W\right\} \quad \text{dla } x \in \boldsymbol{R}^k$$

wyznacza normę jednorodną w $\boldsymbol{R}^k$.

Norma ta nazywa się funkcjonałem Minkowskiego generowanym przez W. Na rysunku 1 przedstawione są trzy standardowe ciała cechujące w $\boldsymbol{R}^2$. Wówczas, jak łatwo sprawdzić, mamy dla $x = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$

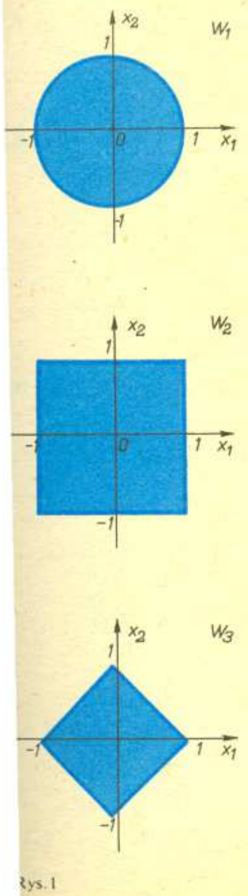
$p_{W_1} = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$,
$p_{W_2} = \max(|x_1|, |x_2|) = \|x\|_\infty$,
$p_{W_3} = |x_1| + |x_2| = \|x\|_1$.

Symbole występujące w prawych częściach wzorów to standardowe oznaczenia tych norm używane w Analizie Funkcjonalnej. Metryka wyznaczona przez normę $\|\ \|_2$ jest zwyczajną metryką euklidesową znaną Czytelnikowi z lekcji geometrii.

Zauważmy wreszcie, że norma $\|\ \|_2$ jest generowana zarówno przez koło z brzegiem, jak i bez brzegu.

Łatwo zauważyć, że:
1. $A = \{x: p_W(x) < 1\} \subset W \subset \{x: p_W(x) \leqslant 1\} = B$,
2. Jeżeli W' jest ciałem cechującym takim, że $A \subset W' \subset B$, to $p_W(x) = p_{W'}(x)$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}^k$,
3. Jeżeli $\|\ \|$ jest normą jednorodną i $W = \overline{K}(\boldsymbol{0}, 1)$, to $\|x\| = p_W(x)$ dla każdego $x \in \boldsymbol{R}^k$.

W ten sposób uzyskaliśmy pełny opis konstrukcji norm jednorodnych w przestrzeni $\boldsymbol{R}^k$.



Rys. 1

W Analizie Funkcjonalnej wyróżnia się normy pochodzące od iloczynu skalarnego nazywane normami hilbertowskimi.

Funkcję $F\colon \boldsymbol{R}^k \times \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}$ nazywamy iloczynem skalarnym, jeżeli

1. $F(x, x) \geqslant 0$ oraz $F(x, x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \boldsymbol{0}$,
2. $F(x, y) = F(y, x)$ dla $x, y \in \boldsymbol{R}^k$,
3. $F(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha F(x_1, y) + \beta F(x_2, y)$ dla $x_1, x_2, y \in \boldsymbol{R}^k$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

Jeżeli F jest iloczynem skalarnym, to kładąc $\|x\|_F \overset{\mathrm{df}}{=} (F(x, x))^{1/2}$ dla $x \in \boldsymbol{R}^k$ otrzymujemy, jak Czytelnik z łatwością sprawdzi, normę jednorodną. Normę taką nazywamy normą hilbertowską w $\boldsymbol{R}^k$.

Jeśli $F_0(x, y) \overset{\mathrm{df}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2$ dla $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \boldsymbol{R}^2$, to F_0 jest iloczynem skalarnym i $\|x\|_{F_0} = \|x\|_2$, więc norma $\|\ \|_2$ jest normą hilbertowską w $\boldsymbol{R}^2$.

Można zadać pytanie: Czy norma $\|\ \|_\infty$ jest normą hilbertowską?

Wykonując niezbyt trudne rachunki Czytelnik może sprawdzić, że w przestrzeni $\boldsymbol{R}^2$ każdy iloczyn skalarny ma postać:

$F(x, y) = a x_1 y_1 + b x_2 y_2 + c(x_1 y_2 + x_2 y_1)$, $x, y \in \boldsymbol{R}^2$, gdzie $a > 0$ i $\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2 > 0$.

Wówczas $\|x\|_F = (a x_1^2 + b x_2^2 + 2c x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}$ dla $x \in \boldsymbol{R}^2$.

Ciałem cechującym generującym tę normę jest zbiór

$W = \{(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 : a x_1^2 + b x_2^2 + 2c x_1 x_2 \leqslant 1\}$, a więc obszar ograniczony elipsą (rys. 2).

Mamy też twierdzenie

Jeżeli W jest ciałem cechującym w $\boldsymbol{R}^2$ ograniczonym elipsą, to norma generowana przez W jest normą hilbertowską.

Podobnie w przypadku przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ norma jest hilbertowska wtedy i tylko wtedy, gdy ciało cechujące jest ograniczone elipsoidą.

Możemy postawić teraz następujący problem:

Jak w $\boldsymbol{R}^k$ wyróżnić wśród norm jednorodnych normy hilbertowskie lub wśród wszystkich ciał cechujących ciała ograniczone elipsoidami?

Zacznijmy od pierwszej części powyższego pytania.

1. Przypuśćmy, że norma $\|\ \|$ jest normą hilbertowską w $\boldsymbol{R}^k$ wyznaczoną przez iloczyn skalarny F. Wówczas

(*) $\|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2tF(x, y) + t^2\|y\|^2$, $x, y \in \boldsymbol{R}^k$, $t \in \boldsymbol{R}$.

Wstawiając w (*) $t = 1$ oraz $t = -1$ i dodając stronami otrzymujemy:

(i) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ dla $x, y \in \boldsymbol{R}^k$ (jest to tzw. równość von Neumanna).

Wstawiając w (*) $\|x\| = \|y\| = 1$ otrzymujemy:

(ii) $\|x + ty\| = \|tx + y\|$ dla $t \in \boldsymbol{R}$, $x, y \in \boldsymbol{R}^k$, $\|x\| = \|y\| = 1$.

Okazuje się, że następujące warunki są równoważne:

(a) norma jednorodna $\|\ \|$ jest normą hilbertowską w $\boldsymbol{R}^k$,

(b) dla każdych $x, y \in \boldsymbol{R}^k$ $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$,

(c) dla każdych $x, y \in \boldsymbol{R}^k$, $t \in \boldsymbol{R}$, jeśli $\|x\| = \|y\| = 1$, to $\|x + ty\| = \|tx + y\|$.

2. Zauważmy, że w przestrzeni $(\boldsymbol{R}^2, \|\ \|_2)$ dla dowolnych $a, b \in \boldsymbol{R}^2$, $t > 1$, jeśli $\|a\| = \|b\| = 1$, to $\|ta - b\| > \|a - b\|$ (rys. 3).

Inaczej jest, gdy mamy do czynienia z normą $\|\ \|_\infty$. Wówczas (rys. 4) wszystkie punkty leżące na zaznaczonym kawałku boku kwadratu $OABC$ są odległe w sensie normy $\|\ \|_\infty$ od punktu b o 1. Tak więc $\|ta - b\|_\infty = \|a - b\|_\infty = 1$ dla każdego $t \in \langle 1, 2\rangle$.

Okazuje się, że do warunków (a), (b), (c) można dołączyć jeszcze jeden warunek równoważny:

(d) dla każdych $a, b \in \boldsymbol{R}^k$ oraz $t > 1$, jeśli $\|a\| = \|b\|$, to $\|ta - b\| > \|a - b\|$.

3. W przestrzeni $(\boldsymbol{R}^k, \|\ \|)$ rozpatrzmy zbiór

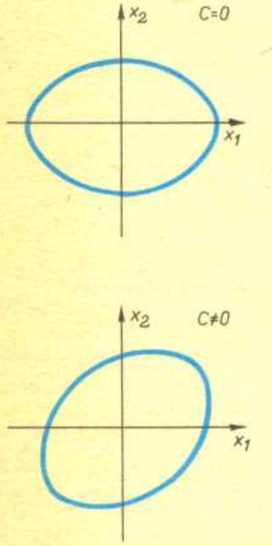
$A(a, b, \alpha) = \left\{x \in \boldsymbol{R}^k : \dfrac{\|x - a\|}{\|x - b\|} = \alpha\right\}$, gdzie $a, b \in \boldsymbol{R}^k$, $a \neq b$, $\alpha > 0$.

W przypadku $(\boldsymbol{R}^2, \|\ \|_2)$ jeśli $\alpha = 1$, to $A(a, b, \alpha)$ jest symetralną odcinka ab, zaś gdy $\alpha \neq 1$, jest okręgiem (por. artykuł J. Bednarczuka w *Delcie* 7/1985). Okazuje się, że mamy kolejny warunek równoważny warunkowi (a):

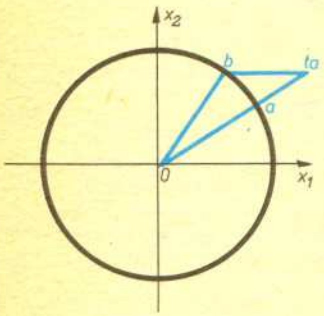
(e) dla każdych $a, b \in \boldsymbol{R}^k$, $a \neq b$ i $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ istnieją takie $x_0 \in \boldsymbol{R}^k$ oraz $r > 0$, że:

$$A(a, b, \alpha) = \{x : \|x - x_0\| = r\}.$$

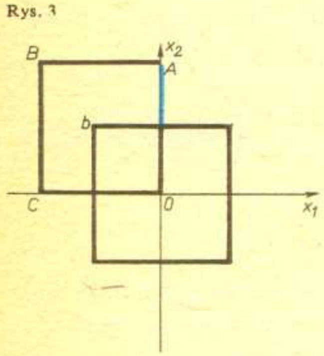
Rozwiązanie zadania M 408. Przypuśćmy, że suma długości cięciw jest nie mniejsza niż $k\pi$. Wówczas suma długości krótszych łuków opartych na tych cięciwach jest większa od $k\pi$. Suma długości tych łuków i łuków symetrycznych do nich względem środka okręgu jest większa od $2k\pi$. Istnieje więc punkt okręgu należący do co najmniej $k+1$ spośród tych wszystkich łuków. Średnica poprowadzona przez ten punkt przecina co najmniej $k+1$ cięciw.



Rys. 2



Rys. 3

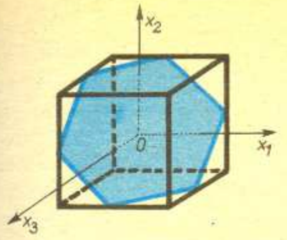


Rys. 4

Wrodzone lenistwo autora nie pozwoliło mu nigdy doprowadzić do końca obliczeń wyznaczających ogólną postać zbioru $A(a, b, \alpha)$ w przypadku norm $\|\ \|_\infty$ i $\|\ \|_1$. Byłby więc bardzo wdzięczny Czytelnikowi, gdyby zechciał wykonać za niego to zadanie i o wyniku tych ustaleń zawiadomił autora za pośrednictwem redakcji *Delty*.

Teraz podamy parę uwag związanych z drugą częścią problemu.

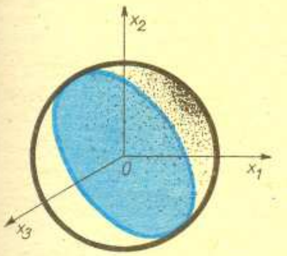
1. Rozważmy przypadek $(\boldsymbol{R}^3, \|\ \|_\infty)$. Ciałem cechującym tę normę jest sześcian $W = \{(x_1, x_2, x_3): |x_1| \leqslant 1, |x_2| \leqslant 1, |x_3| \leqslant 1\}$.
Niech P_0 będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt 0 przecinającą sześcian W, tak jak na rysunku 5. Punkty należące do zakreskowanego sześciokąta mają normę nie większą niż 1. Jeżeli weźmiemy dowolny rzut na płaszczyznę P_0, to po zrzutowaniu co najmniej jeden z obrazów wierzchołków sześcianu będzie leżał na zewnątrz sześciokąta, a więc będzie miał normę większą od 1.



Rys. 5

Zupełnie inaczej jest w przypadku $(\boldsymbol{R}^3, \|\ \|_2)$. Jeżeli weźmiemy rzut w kierunku prostopadłym do P_0, to obraz każdego punktu ciała cechującego będzie leżał w zakreskowanej części płaszczyzny P_0, a więc będzie miał normę nie większą niż 1.

Okazuje się, że dla $k \geqslant 3$ następujące warunki są równoważne:
(A) W jest ciałem cechującym w $\boldsymbol{R}^k$ ograniczonym elipsoidą,
(B) dla każdej podprzestrzeni $P_0 \subset \boldsymbol{R}^k$ istnieje taki rzut π na P_0, że $p_W(\pi(x)) \leqslant 1$ dla dowolnych $x \in W$.

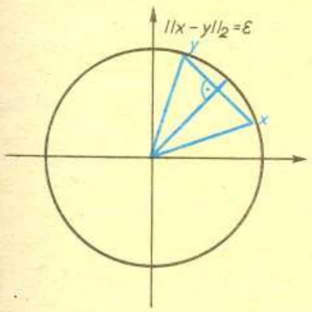


Rys. 6

2. Dla ciała cechującego W i $\varepsilon > 0$ określamy

$$\omega_W(\varepsilon) = \inf\left\{1 - p_W\left(\frac{x+y}{2}\right): p_W(x) = p_W(y) = 1,\ p_W(x-y) = \varepsilon\right\}.$$

Liczbę tę nazywamy ε — modułem wypukłości ciała cechującego W.



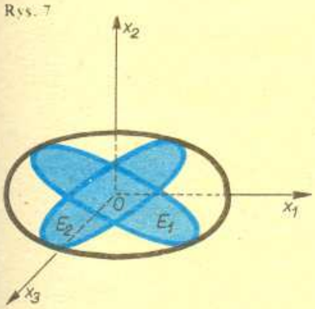
Rys. 7

W przypadku przestrzeni $(\boldsymbol{R}^2, \|\ \|_2)$ mamy $\omega_W(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = \dfrac{\frac{\varepsilon^2}{4}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}}$ dla $\varepsilon > 0$

(rys. 7), stąd $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\omega_W(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{8}$. Gdy W jest ciałem cechującym ograniczonym elipsą, to można wykazać, że istnieją stałe dodatnie M i m takie, że $m \leqslant \dfrac{\omega_W(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \leqslant M$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

Okazuje się, że do warunków (A) i (B) można dodać jeszcze jeden im równoważny:
(C) istnieją stałe $m > 0$ i $M > 0$ takie, że $m \leqslant \dfrac{\omega_W(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \leqslant M$ dla każdego $\varepsilon > 0$.

3. Rozważmy ciało cechujące W w $\boldsymbol{R}^3$ ograniczone elipsoidą. Przekroje podprzestrzeniami dwuwymiarowymi P_1 i P_2 ciała W są zbiorami ograniczonymi przez elipsy E_1 i E_2 (rys. 8). Istnieje afiniczne odwzorowanie $\Phi: P_1 \xrightarrow{\text{na}} P_2$ takie, że $\Phi(E_1) = E_2$. Możemy więc powiedzieć, że każde dwa przekroje ciała cechującego W są afinicznie równoważne.



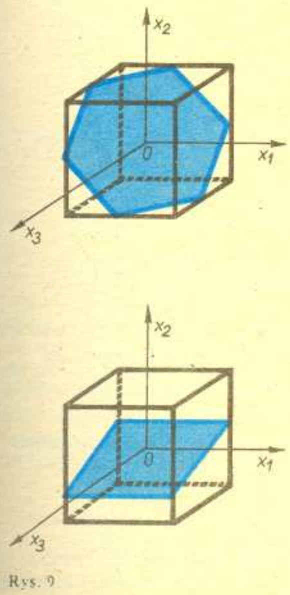
Rys. 8

Inaczej jest w przypadku, gdy ciałem cechującym jest sześcian. Na rysunku 9 pokazane są dwa przekroje, które nie są afinicznie równoważne.

Okazuje się, że także następujący warunek
(D) każde dwa przekroje ciała cechującego W podprzestrzeniami dwuwymiarowymi są afinicznie równoważne
jest równoważny warunkowi (A).

Problem postawiony powyżej można uogólnić w następujący sposób: Niech W będzie ciałem cechującym położonym w przestrzeni $\boldsymbol{R}^k$. Przypuśćmy, że każde dwa przekroje W przestrzeniami l-wymiarowymi $(1 < l < k)$ są afinicznie równoważne. Czy W jest wtedy ciałem cechującym ograniczonym elipsoidą? Pełnej odpowiedzi na to pytanie nie znamy. Nierozstrzygnięty przypadek dotyczy sytuacji, w której k jest parzyste, a $l = k-1$ (np. $k = 4$ i $l = 3$).
W pozostałych przypadkach odpowiedź jest pozytywna.

Na zakończenie sformułujemy jeszcze pewną własność charakteryzującą kulę (a nie elipsoidę!) w $\boldsymbol{R}^3$. Własność tę łatwo sformułować w języku fizyki. Niech W będzie ciałem cechującym w $\boldsymbol{R}^3$ wykonanym np. z żelaza, mającym tę własność, że jakkolwiek postawimy je na stole, będzie to położenie równowagi. Wówczas W jest kulą. Zauważmy, że położenie W na stole można traktować jako zanurzenie W w cieczy o gęstości równej ∞. Można więc postawić ogólniejszy problem: ciało cechujące W ma tę własność, że każda pozycja zanurzenia jego w cieczy jest pozycją równowagi. Czy W jest kulą? Odpowiedź nie jest znana do dzisiaj.



Rys. 9

I już zupełnie na koniec autor ma następujące pytanie do Czytelnika: Jak sformułować powyższą własność (tj. tę ze stołem) w języku matematyki?