

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 103 /WT=2,62/ i 104 /WT=1,83/

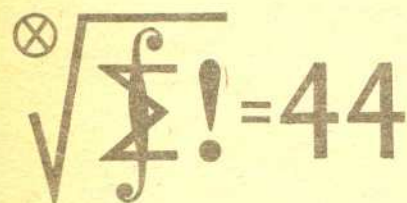
Tomasz Komorowski	- Świdnik	46,12pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	44,91pkt
Jan Ciach	- Ostrowiec Św	44,01pkt
Eryk Witek	- Ostrów Maz.	43,96pkt
Anna Gluza	- Toruń	42,48pkt
Jacek Małdziuk	- Lublin	41,77pkt
Marian Roman	- Ełk	41,28pkt
Tomasz Szymczyk	- BielskoBiała	40,97pkt

44 punkty: pan T. Komorowski po raz drugi,  
pan P. Kamiński po raz czwarty, pan J. Ciach  
po raz pierwszy.

Dwaga! Panie w ofensywie!

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.



Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

## Rozwiązanie zadań z numeru 3/1985

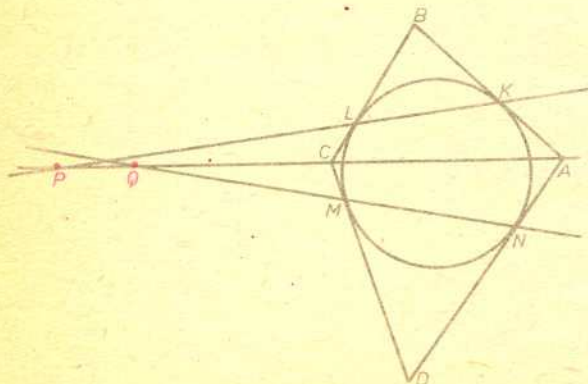
Przypominamy treść zadań:

107. Czworokąt  $ABCD$  jest opisany na kole.  $K, L, M, N$  są odpowiednio punktami styczności boków  $AB, BC, CD, DA$  z kołem. Udowodnić, że proste  $KL, MN$  i  $AC$  przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

108. Udowodnić zbieżność i obliczyć granicę ciągu  $(x_n)$ , w którym  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$  ( $a, b, c$  — dane liczby),  $x_{n+3} = (x_n + x_{n+1} + x_{n+2})/3$ .

107. Jeśli którekolwiek dwa z odcinków  $\overline{KL}, \overline{MN}, \overline{AC}$  są równoległe, to mają one wspólną symetralną, będącą osią symetrii czworokąta  $ABCD$ ; jest ona wówczas także symetralną trzeciego z tych odcinków, a więc wszystkie te odcinki są równoległe. Odrzucając ten przypadek, przyjmijmy, że prosta  $KL$  przecina prostą  $AC$  w punkcie  $P$ , a prosta  $MN$  przecina prostą  $AC$  w punkcie  $Q$ . Na mocy twierdzenia Menelausa, zastosowanego do trójkąta  $ABC$  przeciętego prostą  $KL$  oraz do trójkąta  $ADC$  przeciętego prostą  $MN$ , mamy

$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BK}{KA} = 1 = \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA}$$



Stąd, wobec równości  $LB = BK, MD = DN, CL = CM, KA = AN$ , dostajemy  $AP : PC = AQ : QC$ . Ponieważ  $P \notin \overline{AC}, Q \notin \overline{AC}$ , więc z ostatniej proporcji wynika, że punkty  $P$  i  $Q$  pokrywają się.

108. Dla dowolnej liczby naturalnej  $k$  oznaczmy przez  $T_k$  zbiór złożony z liczb  $x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}$ , przez  $a_k$  oraz  $b_k$  — najmniejszą oraz największą liczbę w tym zbiorze, a przez  $r_k$  — średnicę tego zbioru, czyli różnicę  $b_k - a_k$ . Z określenia ciągu  $(x_n)$  wynikają równości

$$x_{3k+1} = \frac{1}{3} x_{3k-2} + \frac{1}{3} x_{3k-1} + \frac{1}{3} x_{3k},$$

$$x_{3k+2} = \frac{1}{3} x_{3k-1} + \frac{1}{3} x_{3k} + \frac{1}{3} x_{3k+1} = \frac{1}{9} x_{3k-2} + \frac{4}{9} x_{3k-1} + \frac{4}{9} x_{3k},$$

$$\begin{aligned} x_{3k+3} &= \frac{1}{3} x_{3k} + \frac{1}{3} x_{3k+1} + \frac{1}{3} x_{3k+2} = \\ &= \frac{4}{27} x_{3k-2} + \frac{7}{27} x_{3k-1} + \frac{16}{27} x_{3k}. \end{aligned}$$

Widzimy, że każdy z elementów zbioru  $T_{k+1}$  jest kombinacją wypukłą elementów zbioru  $T_k$  (tj. kombinacją o współczynnikach nieujemnych, dających w sumie jedynekę). Zatem  $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$  i ciągi  $(a_k), (b_k)$  są zbieżne jako monotoniczne i ograniczone. Niech  $a = \lim a_k, b = \lim b_k$ . Odejmując stronami poszczególne równości powyższego układu dostajemy

$$x_{3k+3} - x_{3k+2} = \frac{4}{27} (x_{3k} - x_{3k-1}) + \frac{1}{27} (x_{3k-2} - x_{3k-1}),$$

$$x_{3k+3} - x_{3k+1} = \frac{5}{27} (x_{3k} - x_{3k-2}) + \frac{2}{27} (x_{3k} - x_{3k-1}),$$

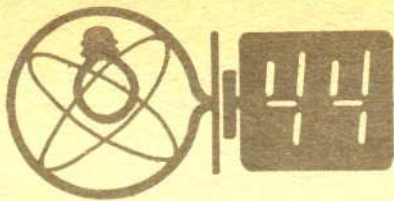
$$x_{3k+2} - x_{3k+1} = \frac{1}{9} (x_{3k} - x_{3k-2}) + \frac{1}{9} (x_{3k-1} - x_{3k-2}).$$

Wszystkie różnice w nawiasach są co do modułu nie większe od  $r_k$ . Zatem moduły lewych stron są nie większe, odpowiednio, od  $\frac{5}{27} r_k, \frac{7}{27} r_k, \frac{6}{27} r_k$ , skąd  $r_{k+1} \leq \frac{7}{27} r_k$ . Wobec tego  $\lim r_k = 0$  i  $a = b$ , czyli ciąg  $(x_n)$  jest zbieżny. Ponieważ  $3x_{n+3} = x_n + x_{n+1} + x_{n+2}$ , więc dodając obustronnie  $x_{n+1} + 2x_{n+2}$  otrzymujemy  $x_{n+1} + 2x_{n+2} + 3x_{n+3} = x_n + 2x_{n+1} + 3x_{n+2}$ , skąd przez oczywistą indukcję  $x_n + 2x_{n+1} + 3x_{n+2} = a + 2b + 3c$  dla każdego  $n$ .

Przechodząc w ostatniej równości do granicy ( $n \rightarrow \infty$ ) dostajemy

$$\text{zatem } \lim x_n = \frac{1}{6} (a + 2b + 3c).$$





$$I_n = - \sum_{i=1}^{n-1} I_i = - \sum_{i=1}^{n-1} G_i \left( \frac{I_1}{G_1} + E_1 - E_i \right).$$

Po podstawieniu ostatniego wyrażenia do równania (3) dla  $i = n$  oraz dokonaniu przekształceń uzyskujemy

$$\sum_{i=1}^n G_i \frac{I_1}{G_1} + \sum_{i=1}^n G_i E_1 - \sum_{i=1}^n G_i E_i = 0,$$

a stąd poszukiwane napięcie  $U_{AB} = \frac{I_1}{G_1} + E_1 = \frac{\sum_{i=1}^n G_i E_i}{\sum_{i=1}^n G_i}$ .

Widać, że bez wprowadzenia przewodności końcowy wzór miałby bardziej złożoną postać.

6. Przedstawione rozumowanie zawiera milczące założenie, że ciśnienie powietrza w cylindrycznej części kanału jest równe ciśnieniu panującemu na zewnątrz oraz pomija siły powstające przy opływie czołowej powierzchni walca.



Rys. 2



Rys. 3

Aby nie wdawać się w skomplikowany problem tego opływu, rozpatrzmy przypadek, w którym walec jest od strony wlotowej przedłużony rurą o średnicy równej jego średnicy zewnętrznej — jak na rysunku 3. Problem został w ten sposób sprowadzony do przepływu powietrza przez rurę o zmiennej średnicy. Ciśnienie powietrza w części zwężonej, na skutek wzrostu jego prędkości, spada w porównaniu z rurą wlotową. W stożkowej części wylotowej natomiast, w związku ze zmniejszeniem prędkości przepływu powietrza, ciśnienie wzrasta. Z porównania średnic i związanych z tym prędkości przepływu wynika, że nie przewyższa ono tam jednak ciśnienia panującego w rurze wlotowej, które działa na powierzchnię czołową walca. Stąd wniosek, że „siła napędowa” działająca na stożkowy wylot kanału nie może przewyższać „siły hamującej” działającej na powierzchnię czołową walca. Dzięki lepkości powietrza „siła napędowa” będzie w rzeczywistości mniejsza od „siły hamującej”.

## Rozwiązania zadań z numeru 3/1985

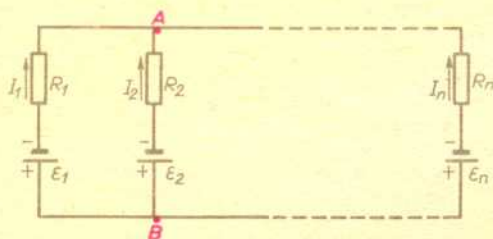
Przypominamy treść zadań:

- Obliczyć napięcie panujące między punktami A i B układu złożonego z n gałęzi zawierających dowolne oporności  $R_i$  i źródła siły elektromotorycznej  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).
- Dany jest walec z wydrążonym wzdłuż osi kanałem, który się rozszerza stożkowo z jednego końca jak na rysunku 2. Podczas poruszania tego walca w kierunku oznaczonym strzałką do kanału od jego wąskiej strony wpada powietrze. Po przepłynięciu powietrza do części stożkowej kanału jego ciśnienie — zgodnie z prawem Bernoulliego — wzrasta. Ciśnienie to działając na ścianki stożkowego kanału wywiera na walec pewną siłę, nadającą mu napęd w kierunku ruchu. Mamy więc perpetuum mobile. Wskazać błąd w powyższym rozumowaniu.

5. Po oznaczeniu płynącego przez  $i$ -tą gałąź prądu przez  $I_i$  (dodatni znak  $I_i$  oraz  $E_i$  zgodny z oznaczeniami na rysunku 1) wypisujemy równania Kirchhoffa:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n I_i = 0,$$

$$(2) \quad R_i I_i + E_i = R_1 I_1 + E_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$



Rys. 1

Dla wygody rachunków wprowadzamy przewodność  $G_i = \frac{1}{R_i}$ ;

równanie (2) przyjmuje teraz postać

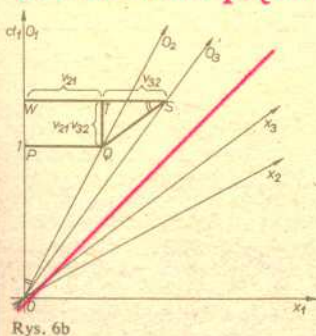
$$(3) \quad \frac{I_i}{G_i} + E_i = \frac{I_1}{G_1} + E_1.$$

## 6. Składanie prędkości

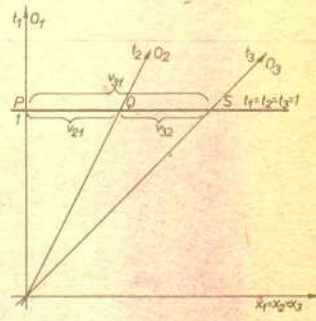
Rozważmy trzech obserwatorów inercjalnych  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Niech  $\theta_2$  porusza się względem  $\theta_1$  z prędkością  $v_{21}$ , a  $\theta_3$  względem  $\theta_2$  z prędkością  $v_{32}$ . Dla prędkości dużo mniejszych od prędkości światła

$$(*) \quad v_{31} = v_{32} + v_{21}.$$

Informację tę można odczytać z diagramu czasoprzestrzennego (rys. 6a). Linia świata obserwatora  $\theta_2$  w układzie  $(x_1, t_1)$  jest jednocześnie osią czasu układu  $(x_2, t_2)$ . Ponieważ przy małych prędkościach czas dla obu obserwatorów biegnie tak samo, oś  $x_2$  (punkty o współrzędnych  $t_1 = 0$ ) pokrywa się z osią  $x_1$ . Prosta  $t_1 = 1$  wprowadza skalę czasu na osiach  $t_2$  i  $t_3$ . W jednostkowym czasie obserwator  $\theta_2$  przebył względem  $\theta_1$  odcinek  $PQ$ , czyli długość  $PQ$  jest równa  $v_{21}$ . Podobnie  $PS = v_{31}$ , a  $QS = v_{32}$ . Prędkość wypadkowa jest więc sumą prędkości  $v_{32}$  i  $v_{21}$ .



Rys. 6b



Rys. 6a

Rys. 6b przedstawia trzech obserwatorów poruszających się z prędkościami bliskimi prędkości światła. Niech  $OP$  będzie jednostką czasu obserwatora  $\theta_1$ . Wtedy

$$v_{21} = PQ, \quad v_{32} = \frac{QS}{OQ} \quad \text{i} \quad v_{31} = \frac{WS}{OW}.$$

Z podobieństwa trójkątów  $QST$  i  $QOP$  wynika:  $\frac{ST}{QS} = \frac{1}{OQ}$ , czyli  $ST = v_{32}$  oraz  $\frac{TQ}{ST} = PQ = v_{21}$ ,

czyli  $TQ = v_{32} \cdot v_{21}$ . Stąd prędkość  $\theta_3$  względem  $\theta_1$   $v_{31} = \frac{ST+TW}{1+TQ} = \frac{v_{32}+v_{21}}{1+v_{32} \cdot v_{21}}$ .

