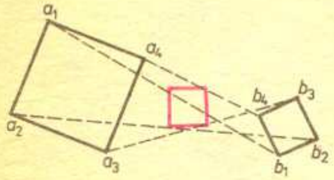
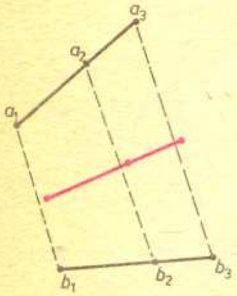
Gdzie są środki?

Dr Jerzy BEDNARCZUK

Weźmy dwa dowolne, jednakowo zorientowane kwadraty $a_1a_2a_3a_4$ i $b_1b_2b_3b_4$. Wówczas środki odcinków $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_2b_2}$, $\overline{a_3b_3}$, $\overline{a_4b_4}$, jeśli się nie pokrywają, także są wierzchołkami kwadratu (rys. 1). Weźmy dla odmiany dwa podobne „trójkąty" $a_1a_2a_3$ i $b_1b_2b_3$ (dlatego „trójkąty", a nie trójkąty, że punkty $a_1a_2a_3$ są współliniowe). Wówczas środki odcinków $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_2b_2}$, $\overline{a_3b_3}$ także są współliniowe, a nawet są wierzchołkami „trójkąta" podobnego do $a_1a_2a_3$, oczywiście, jeśli się te środki nie pokrywają (rys. 2).
Przed dalszym czytaniem warto pokusić się o samodzielne udowodnienie obu tych faktów.



Rys. 1



Rys. 2

Okrąg Apoloniusza

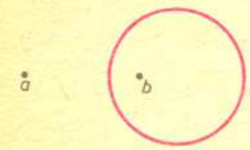
Jeżeli mamy dane dwa różne punkty a i b oraz dodatnią i różną od 1 liczbę t, to zbiorem takich punktów p, że

$$(*) \qquad \frac{pa}{pb} = t$$

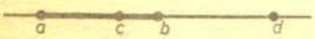
jest okrąg (rys. 3).
Udowodnimy to.
Znając twierdzenie Talesa łatwo znajdziemy na prostej przechodzącej przez punkty a i b takie punkty c i d, które spełniają warunek (*). Jeden z nich należy do odcinka $\overline{ab}$, drugi do niego nie należy (rys. 4). Wykażemy, że $\overline{cd}$ jest średnicą poszukiwanego okręgu.
Weźmy dowolny punkt p, spełniający (*). Wówczas

$$\frac{pa}{pb} = t = \frac{ca}{cb}.$$

Wobec tego prosta pc jest dwusieczną kąta wewnętrznego o wierzchołku p w trójkącie apb. Podobnie prosta pd jest dwusieczną kąta zewnętrznego o tym samym wierzchołku w tym samym trójkącie (rys. 5). Kąt $\sphericalangle\, cpd$ jest więc kątem prostym, czyli punkt p istotnie należy do okręgu o średnicy cd.



Rys. 3



Rys. 4

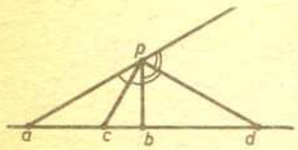
Niech teraz punkt p należy do okręgu o średnicy $\overline{cd}$. Wykażemy, że p spełnia warunek (*). Niech punkty r i s będą takimi punktami prostej ap, że $br \parallel pd$ i $bs \parallel pc$ (rys. 6). Wówczas

$$\frac{pa}{pr} = \frac{da}{db} = t = \frac{ca}{cb} = \frac{pa}{ps}.$$

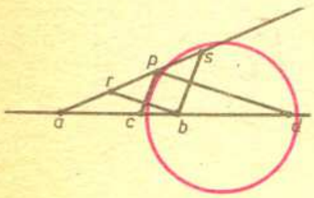
Stąd $pr = ps$, a ponieważ trójkąt rbs jest trójkątem prostokątnym, więc $pr = ps = pb$.
W rezultacie

$$\frac{pa}{pb} = \frac{pa}{ps} = \frac{ca}{cb} = t.$$

Okrąg, o którym tu mówiliśmy, nazywany jest okręgiem Apoloniusza wyznaczonym przez punkty a i b oraz stosunek t.



Rys. 5



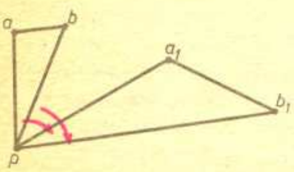
Rys. 6

Podobieństwa

Każde podobieństwo płaszczyzny euklidesowej można przedstawić jako złożenie izometrii i jednokładności. Jeśli jest to złożenie izometrii parzystej i jednokładności, to podobieństwo takie nie zmienia orientacji płaszczyzny i nazywane jest podobieństwem zgodnym. Złożenie izometrii nieparzystej i jednokładności zmienia orientację płaszczyzny i nazywane jest podobieństwem przeciwnym.

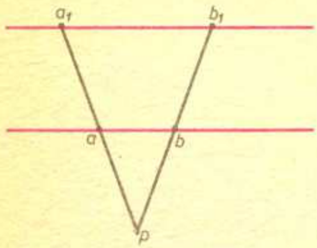
Podobieństwa zgodne

Podobieństwo zgodne może być w szczególności złożeniem obrotu i jednokładności o wspólnym środku p, czyli tak zwanym podobieństwem spiralnym o środku p.
Wykażemy, że każde podobieństwo zgodne jest przesunięciem lub podobieństwem spiralnym. Skorzystamy tu z tego, że dla dowolnych różnych punktów a i b oraz różnych punktów a_1 i b_1 istnieją dokładnie dwa podobieństwa f i g takie, że $f(a) = a_1$, $f(b) = b_1$ oraz $g(a) = a_1$, $g(b) = b_1$, przy czym jedno z tych podobieństw jest podobieństwem zgodnym, a drugie przeciwnym.
Niech f będzie podobieństwem zgodnym, ale nie przesunięciem. Obierzmy dwa dowolne różne punkty a i b i oznaczmy $f(a) = a_1$, $f(b) = b_1$. Dla dowodu wystarczy wskazać taki punkt p, by trójkąty pab i pa_1b_1 były podobne i miały tę samą orientację. Wówczas bowiem f będzie złożeniem obrotu wokół punktu p o kąt $\sphericalangle\, apa_1$ i jednokładności o środku p, o stosunku $\frac{a_1p}{ap}$, a więc podobieństwem spiralnym (rys. 7).



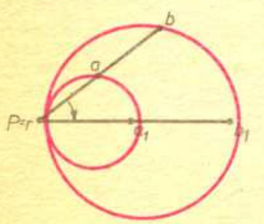
Rys. 7

W przypadku, gdy proste ab i a_1b_1 są równoległe, takim punktem p jest po prostu punkt przecięcia prostych aa_1 i bb_1, a f jest jednokładnością (rys. 8).

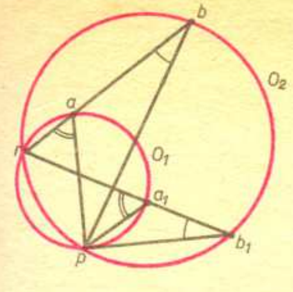


Rys. 8

Jeśli proste ab i $a_1\,b_1$ przecinają się w punkcie r, poprowadźmy dwa okręgi: O_1 przez punkty r, a, a_1, oraz O_2 przez punkty r, b, b_1. Może się okazać, że są one styczne w punkcie r, ale wtedy r jest środkiem jednokładności przekształcającej O_1 na O_2 i „trójkąty" rab i ra_1b_1 są podobne. Wystarczy więc przyjąć $p = r$ (rys. 9). Jeśli natomiast okręgi O_1 i O_2 przecinają się



Rys. 9

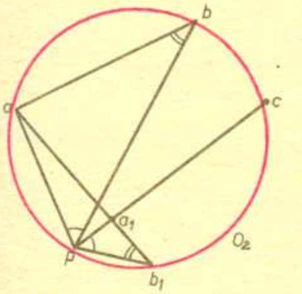


Rys. 10

w dwóch punktach, to poszukiwanym punktem p jest drugi ich punkt przecięcia (rys. 10). Trójkąty pab i pa_1b_1 są podobne, bo przystają kąty $\sphericalangle\ rbp$ i $\sphericalangle\ rb_1p$ jako kąty wpisane w O_2 oparte na tych samych łukach; z podobnego powodu przystają kąty $\sphericalangle\ rap$ i $\sphericalangle\ ra_1p$, tyle tylko, że dzieje się to w okręgu O_1.

Przy powyższej konstrukcji punktu p możemy natknąć się na trudności: może okazać się, że okrąg O_1 lub O_2 nie jest wyznaczony jednoznacznie, bo na przykład punkty a, a_1, b_1 są współliniowe. W tym przypadku na okręgu O_2 przechodzącym przez punkty a, b, b_1 obieramy taki punkt c, by cięciwy $\overline{ab}$ i $\overline{cb_1}$ były przystające (rys. 11). Punkt p otrzymamy na przecięciu okręgu O_2 z prostą ca_1.

Podobieństwa przeciwne

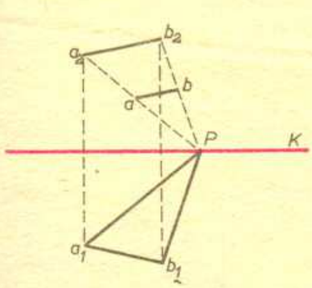


Rys. 11

Podobieństwo przeciwne może być w szczególności złożeniem symetrii osiowej względem pewnej prostej K i jednokładności o środku p należącym do K, czyli tak zwanym odbiciem dylatacyjnym o osi K i środku p.

Każde podobieństwo przeciwne jest symetrią z poślizgiem lub odbiciem dylatacyjnym. Jak to wykazać?

Niech f będzie podobieństwem przeciwnym, ale nie symetrią z poślizgiem. Podobnie jak poprzednio, obieramy dwa dowolne różne punkty a i b i oznaczamy $f(a) = a_1$, $f(b) = b_1$. Tym razem należy znaleźć taki punkt p, by trójkąty pab i pa_1b_1 były podobne i miały przeciwne orientacje. Wtedy f będzie złożeniem jednokładności o środku p i stosunku $\frac{a_1p}{ap}$, przekształcającej a na a_2 i b na b_2 oraz symetrii względem symetralnej K odcinka $\overline{a_2a_1}$. Prosta K jest wówczas również symetralną odcinka $\overline{b_2b_1}$ i przechodzi przez p (rys. 12). Tym razem poszukiwania punktu p pozostawiamy Czytelnikowi. Poszukiwania te można zacząć nie od punktu p, ale od osi K, zwłaszcza że łatwo można zauważyć, iż powinna ona mieć kierunek dwusiecznej kąta między prostymi ab i a_1b_1.



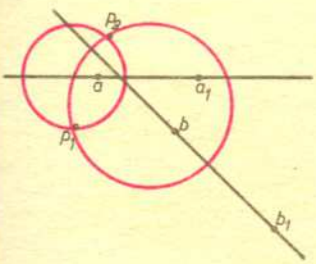
Rys. 12

Jeszcze raz podobieństwa

Obierzmy dwa dowolne różne punkty a i b oraz różne punkty a_1 i b_1 takie, by długości odcinków $\overline{ab}$ i $\overline{a_1b_1}$ były różne. Znajdźmy teraz taki punkt p, by trójkąty pab i pa_1b_1 były podobne. Skoro trójkąty pab i pa_1b_1 mają być podobne, to powinniśmy mieć

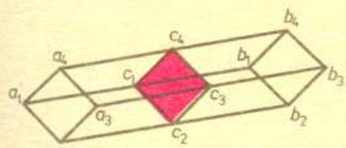
$$\frac{pa}{pa_1} = \frac{ab}{a_1b_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{pb}{pb_1} = \frac{ab}{a_1b_1}.$$

Z pierwszej równości wynika, że poszukiwany punkt p należy do okręgu Apoloniusza wyznaczonego przez punkty a i a_1 oraz różny od jedności stosunek $\frac{ab}{a_1b_1}$. Z drugiej równości wynika natomiast, że p należy do okręgu Apoloniusza wyznaczonego przez punkty b i b_1 oraz ten sam stosunek. Jeśli narysujemy obydwa okręgi (rys. 13), to p_1 — jeden z ich punktów przecięcia — będzie środkiem podobieństwa spiralnego przekształcającego odpowiednio a i b na a_1 i b_1, a drugi — p_2 — środkiem odbicia dylatacyjnego, także przekształcającego a i b na a_1 i b_1 odpowiednio.



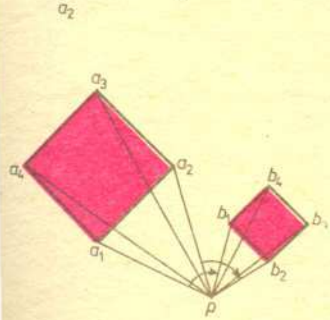
Rys. 13

Raz jeszcze środki i nie tylko



Rys. 14

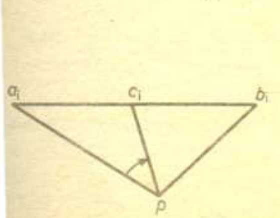
Powróćmy do naszego zadania o kwadratach. Niech kwadraty $a_1a_2a_3a_4$ i $b_1b_2b_3b_4$ będą jednakowo zorientowane. Mamy wykazać, że środki c_i odcinków $\overline{a_ib_i}$ są wierzchołkami kwadratu lub się pokrywają. Wiemy już, że podobieństwo przekształcające odpowiednio punkty a_i na punkty b_i jest przesunięciem lub podobieństwem spiralnym. W pierwszym przypadku środki odcinków $\overline{a_ib_i}$ są obrazami punktów a_i przy przesunięciu, a więc są także wierzchołkami kwadratu (rys. 14). Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy podobieństwem tym jest podobieństwo spiralne i niech punkt p będzie jego środkiem (rys. 15). Podobieństwo to jest więc złożeniem obrotu wokół punktu p o kąt $\sphericalangle\ a_1pb_1$ oraz jednokładności o środku p i stosunku $\frac{b_1p}{a_1p}$. Wobec tego kąty $\sphericalangle\ a_ipb_i$ są przystające i liczby $\frac{b_ip}{a_ip}$ są równe, a stąd wynika, że wszystkie trójkąty a_ipb_i są podobne. W takim razie i wszystkie trójkąty a_ipc_i są podobne (rys. 16). Punkty c_i są więc obrazami odpowiednio punktów a_i przy złożeniu obrotu wokół punktu p o kąt $\sphericalangle\ a_1pc_1$ z jednokładnością o środku p i stosunku $\frac{c_1p}{a_1p}$, a więc są wierzchołkami kwadratu.



Rys. 15

Dowód powyższy ma pewną zaletę. Można go bez istotnych zmian przepisać jako dowód ogólniejszego twierdzenia:

Jeżeli figury F_1 i F_2 są podobne i istnieje podobieństwo zgodne f, takie że $f(F_1) = F_2$, to zbiór wszystkich takich punktów, które dzielą w tym samym, ustalonym stosunku odcinki $\overline{af(a)}$, gdzie $a \in F_1$, jest figurą podobną do F_1 lub wszystkie te punkty się pokrywają.



Rys. 16