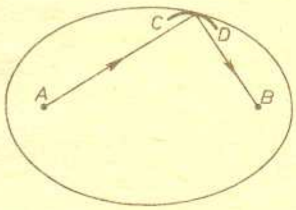
Zasada najmniejszego działania

Dr Adam BECHLER

Aby określić ruch ciała materialnego, musimy wiedzieć, jakie siły działają na to ciało oraz jakie są tak zwane warunki początkowe, czyli położenie i prędkość ciała w pewnej początkowej chwili czasu t_0 (np. dla $t_0 = 0$). Ciało swobodne porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej przechodzącej przez punkt określający początkowe położenie ciała i równoległej do kierunku prędkości początkowej. W przypadku rzutu ukośnego w polu grawitacyjnym paraboliczny tor tego ruchu określony jest jednoznacznie przez punkt, z którego ciało zostało wyrzucone i przez kierunek oraz długość wektora prędkości w tym punkcie.

W mechanice spotykamy się jednak często z zagadnieniami innego typu, gdy zamiast warunków początkowych mamy określone tak zwane warunki brzegowe, czyli znamy położenie ciała na początku i końcu ruchu. Dobrym przykładem takiego zagadnienia jest podróż z Ziemi na Księżyc. Punkt początkowy toru statku kosmicznego znajduje się na powierzchni Ziemi, a końcowy na powierzchni Księżyca. Aby trafić w Księżyc (zapomnijmy na moment o poprawkach toru dokonywanych w trakcie lotu), musimy odpowiednio dobrać położenie i prędkość rakiety w chwili startu, a więc warunki brzegowe musimy przetłumaczyć na warunki początkowe. Można jednak problem postawić w inny sposób: jak znaleźć tor (lub równanie różniczkowe określające tor) ciała poruszającego się w danym polu sił między punktami A (początkowym) i B (końcowym)? Lub ogólniej: czy istnieje jakaś zasada, za pomocą której można otrzymać równania ruchu w mechanice?



Przykładem, gdy promieniom świetlnym biegnącym po różnych torach między punktami A i B odpowiadają takie same drogi optyczne, jest sytuacja, gdy B jest obrazem A utworzonym za pomocą soczewki skupiającej. Podobnie, gdy A i B są dwoma ogniskami elipsy, wszystkie promienie docierające z A do B po odbiciu od elipsy przebywają tę samą drogę. Jeżeli część łuku elipsy zastąpimy łukiem o większej krzywiźnie (na rysunku łuk CD), to rzeczywisty tor będzie odpowiadał lokalnemu maksimum drogi optycznej (gdy krzywizna jest mniejsza — realizowane jest minimum).

Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, a zasada tego typu pojawiła się najpierw w optyce geometrycznej, gdzie znana jest obecnie pod nazwą zasady Fermata. Określa ona tor promienia świetlnego w ośrodku, w którym współczynnik załamania zależy od położenia. Zgodnie z tą zasadą promień świetlny biegnie między dwoma punktami A i B po takim torze, wzdłuż którego droga optyczna ma wartość ekstremalną (w większości przypadków jest to minimum). Gdy współczynnik załamania jest stały, $n = \text{const}$, drogą optyczną nazywamy iloczyn n i długości toru promienia świetlnego, gdy natomiast n zmienia się od punktu do punktu, to dzielimy tor na odcinki na tyle krótkie, że na każdym z nich współczynnik załamania można uważać za stały. Droga optyczna jest wtedy zdefiniowana jako:

$$\text{(1)} \qquad \textit{droga optyczna} = \sum_i n_i \Delta s_i ,$$

gdzie n_i jest wartością współczynnika załamania na i-tym odcinku, a Δs_i długością tego odcinka. W granicy, gdy Δs_i dąży do zera i jednocześnie liczba punktów podziału dąży do nieskończoności, otrzymujemy

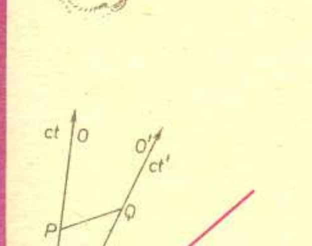
$$\text{(2)} \qquad \textit{droga optyczna} = \int_A^B n(s)\,\mathrm{d}s .$$

Przez dwa punkty A i B można przeprowadzić dowolnie wiele hipotetycznych torów promienia świetlnego i dla każdego z nich obliczyć drogę optyczną. Wzdłuż jednego z nich droga optyczna

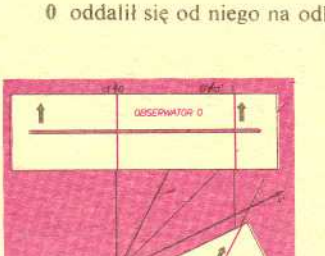
5. Dwaj obserwatorzy

Linię świata pierwszego mieszkańca naszego jednowymiarowego świata mogliśmy wybrać dowolnie. Dla następnych nie mamy już tej swobody wyboru, bo poruszają się względem pierwszego w określony sposób.

Załóżmy, że linie świata dwóch obserwatorów inercjalnych **0** i **0**′ przecinają się w punkcie O i w tym punkcie synchronizują oni swoje zegary (rys. 5a). Według **0** w czasie OP obserwator **0** oddalił się od niego na odległość PQ, czyli prędkość **0**′ względem **0** jest równa $V = \dfrac{PQ}{OP}$.



Rys. 5a



Rys. 5b

Obserwator **0**′ może, podobnie jak to zrobił **0** w części 4, wprowadzić swoją oś odległości tak, by mierzona przez niego prędkość światła $\dfrac{ST}{OS}$ była równa jedności. Na razie nie znamy związku między skalami czasu i odległości obu obserwatorów, a więc nie potrafimy przetłumaczyć wyników pomiarów jednego na wyniki drugiego. Możliwe jest jednak jakościowe porównanie obserwacji. W tym celu najlepiej posłużyć się opisanym wcześniej kartonikiem z wycięciem. Kartonik trzeba teraz przesuwać tak, aby wycięcie było równoległe do osi odległości, a linia świata obserwatora była widoczna zawsze w tym samym punkcie szczeliny (rys. 5b). Prowadzenie kartonika mogą ułatwić dodatkowe linie (na rysunku zaznaczone kolorem). W szczelinie widoczne są zdarzenia zachodzące równocześnie z punktu widzenia danego obserwatora.

będzie miała wartość minimalną i to jest właśnie tor, który zostaje „wybrany" przez promień świetlny w ośrodku. Jeżeli współczynnik załamania jest stały, można go wynieść przed całkę we wzorze (2) i zasada Fermata mówi, że

(3) $$nl = \text{minimum}$$

(l jest długością toru promienia świetlnego). Światło rozchodzi się więc wtedy wzdłuż linii prostej. Ciekawszy przykład stanowi prawo załamania światła, które wynika także z zasady Fermata: promień świetlny przechodzi przez granicę dwóch ośrodków w taki sposób, że droga optyczna jest minimalna (patrz np. Grzegorz BIAŁKOWSKI, *Biblioteczka Delty* t. 4, str. 4).

Zasada Fermata w optyce geometrycznej stanowiła inspirację dla sformułowania analogicznych zasad w mechanice. Spróbujmy potraktować obszar, w którym na ciało działają siły, podobnie jak ośrodek optyczny o zmiennym współczynniku załamania; odpowiednikiem toru promienia świetlnego będzie wtedy tor ciała. Nie należy stąd oczywiście wnioskować, że ruch mechaniczny i rozchodzenie się światła w optyce geometrycznej to jedno i to samo. Chcemy się tu posłużyć jedynie pewną analogią, która może być pomocna przy znajdowaniu toru ciała materialnego poruszającego się w polu sił. Jeżeli siły działające na ciało są zachowawcze (czyli że można wprowadzić energię potencjalną $V(r)$), to okazuje się, że rolę współczynnika załamania odgrywa następująca wielkość:

(4) $$\text{„\textit{współczynnik załamania}"} = \sqrt{E - V(r)},$$

gdzie E jest całkowitą energią ciała (stałą w czasie ruchu). Ruch między punktami A i B odbywa się po takim torze, że

(5) $$\int_A^B \sqrt{E - V(r)}\,\mathrm{d}s = \text{ekstremum}.$$

Równanie (5) nosi nazwę zasady Jacobiego; pozwala ona określić kształt toru, nie możemy jednak za jej pomocą wyznaczyć zależności położenia ciała od czasu. (Polecamy Czytelnikowi sprawdzenie, że funkcja podcałkowa we wzorze (5) jest proporcjonalna do prędkości. Jak zależy od prędkości światła w ośrodku funkcja podcałkowa w zasadzie Fermata?)

Głównym problemem, który chcemy rozwiązać w mechanice, jest jednak nie tyle sam kształt toru, co zależność położenia ciała od czasu (wynika z niej zresztą także kształt toru). Ogólną zasadą pozwalającą określić ewolucję czasową jest tak zwana zasada najmniejszego działania Hamiltona. Zgodnie z nią ruch ciała materialnego odbywa się w taki sposób, że pewna wielkość zwana działaniem ma wartość minimalną, a ściśle mówiąc ekstremalną, z tym że w większości przypadków jest to minimum. Działanie zdefiniowane jest w następujący sposób:

(6) $$\textit{działanie} = \int_{t_A}^{t_B} L\,\mathrm{d}t,$$

Rozwiązanie zadania M 403. Mamy

$N = 1 + 40 + 40^2 + \ldots + 40^{999} = \dfrac{40^{1000}-1}{40-1} = \dfrac{40^{1000}-1}{39}$.

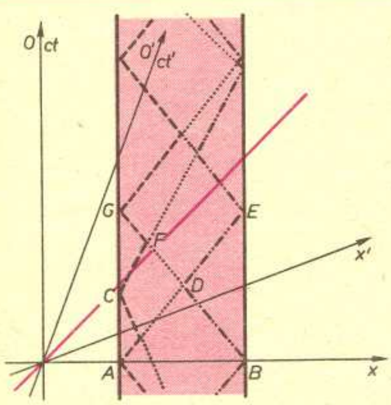
Bezpośrednio można sprawdzić, że rozwinięcie dziesiętne $\frac{1}{39}$ jest ułamkiem okresowym $0,(025641)$. Oznaczmy okres tego ułamka przez P (P ma 6 cyfr). Mamy $1002 = 167 \cdot 6$, a stąd

$\dfrac{10^{1002}}{39} = \underbrace{PP\ldots P}_{167\text{ razy}}, PP\ldots$, a więc

$M = \dfrac{10^{1002}-1}{39} = \underbrace{PP\ldots P}_{167\text{ razy}}$. Zauważmy, że

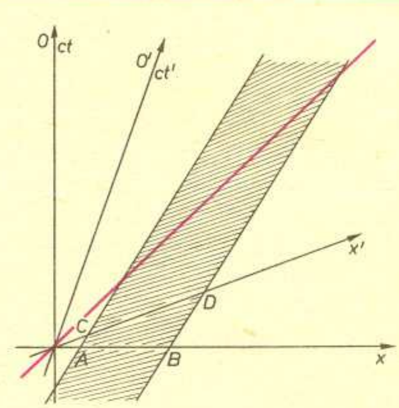
$N - M = \dfrac{4^{1000}\cdot 10^{1000}-1}{39} - \dfrac{10^{1002}-1}{39} = \dfrac{4^{1000}-10^2}{39}\cdot 10^{1000}$

jest liczbą całkowitą, a ponieważ 39 i 10^{1000} są względnie pierwsze, więc $K = \dfrac{4^{1000}-10^2}{39}$ jest również całkowite. $N - M = 10^{1000}\cdot K$, czyli M i N mają takie same ostatnie 1000 cyfr, a mianowicie $5641\underbrace{PP\ldots P}_{166\text{ razy}}$.



Rys. 5c

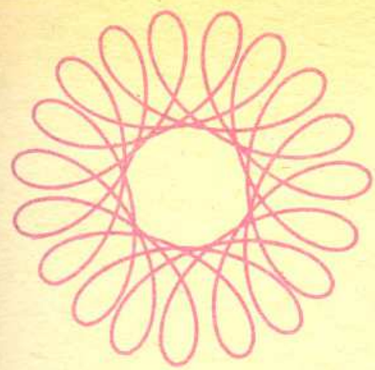
Na rysunku 5c przedstawiona jest historia jednowymiarowego „gazu" złożonego z trzech jednakowych cząstek. Gaz zamknięty jest w naczyniu. Przy każdym zderzeniu cząstki wymieniają się prędkościami, bo zderzenia są sprężyste. Warto przenieść rys. 5c na większą kartkę i obejrzeć za pomocą kartonika. Przebieg zdarzeń dla obserwatora **0**, dla którego naczynie spoczywa, jest inny niż dla poruszającego się obserwatora **0'**. Dla **0** zdarzenia A i B oraz C i D są równoczesne, a dla **0'** równoczesne są zdarzenia C i E. Dla jakiego obserwatora równocześnie nastąpią odbicia B i C?



Rys. 5d

Względność równoczesności ma także wpływ na pomiar odległości. Długość pręta mierzy się wyznaczając w tej samej chwili współrzędne jego końców. Ponieważ zdarzenia równoczesne w jednym układzie inercjalnym nie są równoczesne w innym, wynik pomiaru zależy od układu odniesienia. Czytelnikowi pozostawiamy prześledzenie pomiarów na podstawie rysunku 5d. Jednak dopiero znalezienie związku między skalami odległości i czasu w **0** i **0'** pozwoli na ilościowe porównanie wyników.

(cdn.)



gdzie funkcja L, zwana funkcją Lagrange'a, równa jest różnicy energii kinetycznej i potencjalnej: $L = E_{kin} - V$, t_A jest chwilą czasu, gdy ciało znajdowało się w punkcie A, a t_B — chwilą, w której osiągnęło końcowy punkt B. Zauważmy, że całkujemy teraz nie względem przebytej drogi, lecz względem czasu.

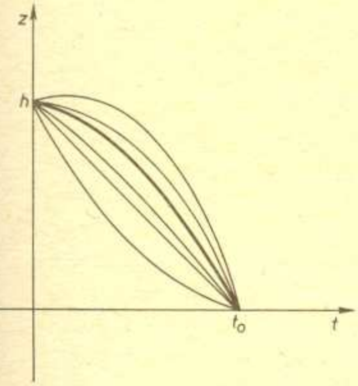
Czy zasada Hamiltona i „zwykłe" równanie mechaniki: $F = ma$, są sobie równoważne? Oczywiście, tak; w przeciwnym razie nie doszłoby w ogóle do jej sformułowania. Praktyczne znaczenie zasady najmniejszego działania polega na tym, że pozwala ona określić ruch bardziej skomplikowanych układów mechanicznych w sposób dużo prostszy niż równanie $F = ma$. Główną jednak zaletą zasady Hamiltona jest to, że „ignoruje" ona siły reakcji więzów; chcąc natomiast napisać równanie Newtona, musimy uwzględnić wszystkie siły.

Zasada najmniejszego działania ma także pewne znaczenie uniwersalne — za jej pomocą można sformułować nie tylko równania mechaniki, lecz także, na przykład, równania pola grawitacyjnego czy równania pola elektromagnetycznego. Może ona też stanowić dogodny punkt wyjścia przy przejściu od teorii klasycznych do teorii kwantowych i to nie tylko mechaniki, lecz także teorii znacznie bardziej skomplikowanych, jak na przykład elektrodynamika.

Rozpatrzmy na zakończenie prosty przykład ilustrujący zasadę Hamiltona. Jak wiemy, droga przebyta w czasie t przez ciało rzucone pionowo w polu grawitacyjnym wyraża się wzorem

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + bt + c, \tag{7}$$

przy czym oś z skierowaliśmy pionowo do góry, a wartości b i c zależą od warunków początkowych bądź brzegowych. Jeżeli rzut nastąpił z wysokości h i ciało po czasie t_0 spadło na powierzchnię Ziemi, to



$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 - \frac{h - \frac{1}{2}gt_0^2}{t_0}t + h, \tag{8}$$

czyli $z(0) = h$, $z(t_0) = 0$. Kształt funkcji $z(t)$ przedstawiony jest na rysunku grubą linią. Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy o zasadzie najmniejszego działania, spośród wszystkich możliwych funkcji $z(t)$, takich że $z(0) = h$ i $z(t_0) = 0$ (tak zwanych funkcji porównawczych zaznaczonych na rysunku cienkimi liniami) rzucone pionowo ciało „wybierze" taką zależność $z(t)$, dla której działanie będzie miało wartość minimalną. Aby przekonać się, że tak jest istotnie, rozpatrzmy funkcje porównawcze postaci:

$$z\eta(t) = \left(-\frac{g}{2} + \eta\right)t^2 - \frac{h - \left(\frac{1}{2}g - \eta\right)t_0^2}{t_0}t + h. \tag{9}$$

Zauważmy, że wszystkie one spełniają nasz warunek brzegowy ($z\eta(0) = h$, $z\eta(t_0) = 0$) i dla $\eta = 0$ otrzymujemy rzeczywistą zależność drogi od czasu (7). Jeżeli teraz obliczymy działanie przyjmując, że zależność z od czasu dana jest wzorem (9), to działanie to powinno mieć minimum dla $\eta = 0$. Znajdźmy najpierw funkcję Lagrange'a:

$$L = E_{kin} - V = \frac{1}{2}m\left(\frac{dz\eta}{dt}\right)^2 - mgz\eta,$$

a więc

$$L = \frac{1}{2}m\left[(-g + 2\eta)t - \frac{h - \left(\frac{1}{2}g - \eta\right)t_0^2}{t_0}\right]^2 - \tag{10}$$

$$-mg\left[\left(-\frac{g}{2} + \eta\right)t^2 - \frac{h - \left(\frac{1}{2}g - \eta\right)t_0^2}{t_0}t + h\right].$$

Podstawiając (10) do (6) i wykonując proste całkowanie otrzymujemy

$$S = \int_0^{t_0} L\,dt = \frac{1}{6}mt_0^3\left(\eta^2 - \frac{g^2}{4}\right) + \frac{hm}{2t_0}(h - gt_0^2), \tag{11}$$

a więc działanie S traktowane jako funkcja η ma postać $S = A\eta^2 + B$, przy czym $A > 0$. Widzimy stąd, że istotnie dla $\eta = 0$ działanie ma minimum.

Przedstawiony tu przykład stanowi tylko ilustrację zasady najmniejszego działania w przypadku rzutu pionowego, a nie jej dowód, bowiem ze zbioru wszystkich możliwych funkcji porównawczych wybraliśmy tylko pewną ich klasę określoną wzorem (9). Istnieje oczywiście ogólny dowód równoważności zasady Hamiltona i równania Newtona przeprowadzony za pomocą metod rachunku wariacyjnego.

Rozwiązanie zadania M 401. Niech a_i oznacza liczbę ciągów danych w zadaniu o długości $i (i = 1, \ldots, k)$. Dla każdego $i \leqslant n$ oraz ustalonego ciągu zero-jedynkowego długości i mamy 2^{n-i} ciągów długości n, których jest on początkiem. Stąd

$$a_n \leqslant 2^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot 2^{n-i} \text{ oraz } \sum_{i=n+1}^{k} a_i = (2^n - a_n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot (2^{n-i} - 1).$$

Sumę długości wszystkich ciągów można więc oszacować następująco

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot i \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot i + n\left(2^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{i=n+1}^{k} a_i\right) + (n+1)\sum_{i=n+1}^{k} a_i =$$

$$= n \cdot 2^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(i - n) + \sum_{i=n+1}^{k} a_i \geqslant$$

$$\geqslant n \cdot 2^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(i - n - 1 + 2^{n-i}) \geqslant n \cdot 2^n$$

(korzystamy z nierówności $2^m \geqslant m + 1$ dla $m \geqslant 1$).