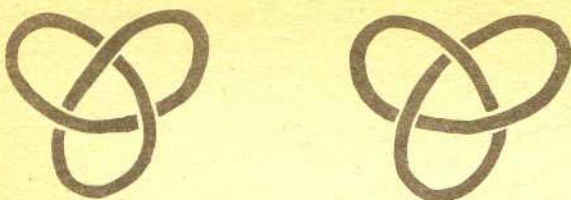
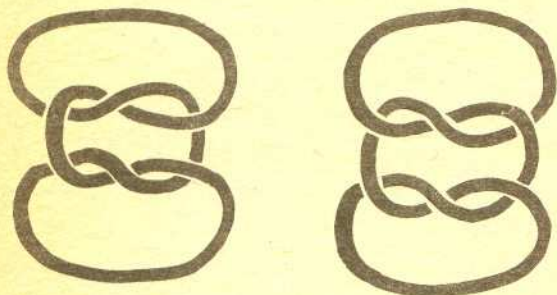


# Jeszcze raz o węzłach i splotach

Mgr Joanna KANIA-BARTOSZYŃSKA,  
dr Józef PRZYTYCKI

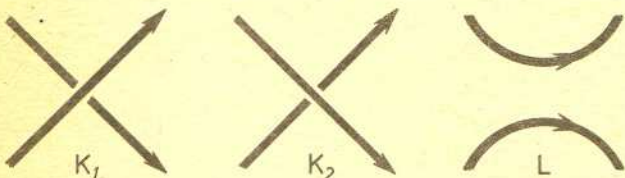


Rys. 1. Węzeł trójlistny lewostronny Węzeł trójlistny prawostronny



Rys. 2 Węzeł płaski Węzeł babski

Funkcja  $F_K$  nie jest wielomianem, ale w topologii algebraicznej przyjęło się używać tego terminu.

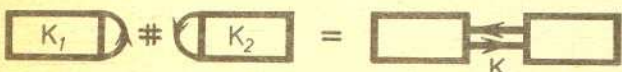


Rys. 3

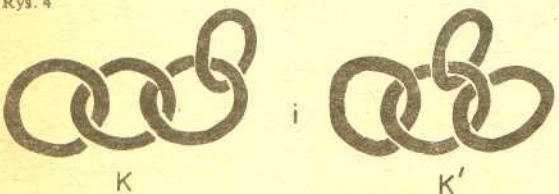
Latem 1984 roku sensację wzbudziło odkrycie przez Vaughana Jonesa nowego niezmiennika splotów. Był on zdefiniowany bardzo zawiłe, przy użyciu pewnych skończonych algebr von Neumanna. W kilka miesięcy później Jones zauważył, że jego niezmiennik można zdefiniować za pomocą rysunku 3. Niezmiennik Jonesa jest szczególnym przypadkiem wielomianu  $F_K$ .

Otrzymuje się go przez podstawienie  $x = \frac{1}{i(\sqrt{i} - \frac{1}{\sqrt{i}})}$ ,

$$y = -\frac{i}{\sqrt{i} - \frac{1}{\sqrt{i}}}$$

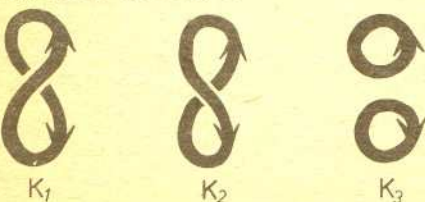


Rys. 4



Rys. 5. Sploty  $K$  i  $K'$  nie są równoważne, ale ich wielomiany są równe (dowód w numerze).

**Zadanie:** Pokazać, że jeśli  $K$  jest splotem trywialnym o  $n$  składowych, to  $F_K(x, y) = (x+y)^{n-1}$  (można skorzystać z poniższego rysunku).  
Przypomnijmy, że wielomian Conway dowolnego splotu trywialnego był równy 0.



W *Delcie* 1/1985 pisaliśmy o wielomianie Conwaya, niezmienniku węzłów i splotów. Przypomnijmy, że splot jest to rodzina parami rozłącznych okręgów zanurzonych w przestrzeni euklidesowej  $E^3$ . Splotom możemy przypisywać orientację. Splot o jednej składowej nazywamy węzłem. Dwa sploty są równoważne, jeśli jeden można otrzymać z drugiego przez ruch w przestrzeni bez cięcia i wiązania. Aby stwierdzić, czy sploty są równoważne, wygodnie jest przypisywać im obiekty algebraiczne (np. wielomiany). Niezmiennikiem splotów nazywamy obiekt algebraiczny przyporządkowany każdemu splotowi, jednakowy dla równoważnych splotów. Takim niezmiennikiem był wielomian Conwaya, który odróżniał wiele węzłów i splotów znanych na przykład z żeglarstwa i alpinizmu. Nie odróżniał on jednak węzła trójlistnego lewostronnego od prawostronnego (rys. 1) ani węzła płaskiego od babskiego (rys. 2). Pisaliśmy w poprzednim artykule, że aby odróżnić te węzły, trzeba użyć zaawansowanych metod topologii algebraicznej. Ostatnio okazało się jednak, że wystarczy uogólnić metodę Conwaya.

**Twierdzenie.** Każdemu zorientowanemu splotowi  $K$  można przyporządkować wielomian  $F_K$  dwóch zmiennych  $x$  i  $y$  (występujących z dodatnimi lub ujemnymi potęgami) o współczynnikach całkowitych spełniający:

- A.  $F_K$  jest niezmiennikiem  $K$ .
- B. Jeśli  $K$  jest węzłem trywialnym, to  $F_K(x, y) = 1$ .
- C. Jeśli trzy zorientowane sploty mają identyczne diagramy wszędzie z wyjątkiem części przedstawionych na rysunku 3, to

$$xF_{K_1}(x, y) + yF_{K_2}(x, y) = F_L(x, y).$$

Wielomian Conwaya otrzymamy, jeśli podstawimy

$$x = \frac{1}{z} \text{ i } y = -\frac{1}{z}.$$

Wielomian  $F_K$  ma wszystkie zalety wielomianu Conwaya:

- 1. Jeśli  $\bar{K}$  jest lustrzanym odbiciem splotu  $K$ , to

$$F_{\bar{K}}(x, y) = F_K(y, x),$$

tzn. wielomiany różnią się zamianą miejscami  $x$  z  $y$ .

- 2. Jeśli  $-K$  jest splotem otrzymanym z  $K$  przez zmianę orientacji wszystkich składowych, to  $F_{-K}(x, y) = F_K(x, y)$ .

- 3. Jeśli  $K$  jest sumą splotów  $K_1$  i  $K_2$  (rys. 4), co zapisujemy  $K = K_1 \# K_2$ , to

$$F_{K_1 \# K_2}(x, y) = F_{K_1}(x, y) \cdot F_{K_2}(x, y).$$

Ponadto wielomian  $F_K$  odróżnia znacznie więcej węzłów i splotów niż wielomian Conwaya (np. lewostronny trójlistnik od prawostronnego, węzeł płaski od babskiego). Są jednak węzły, których nie rozróżnia (rys. 5).

W *Delcie* 1/1985 pisaliśmy, że dowód tego, iż wielomian Conwaya jest wyznaczony jednoznacznie, wymaga

Znajdziemy wielomiany obu trójlitników. Dla lewostronnego mamy (patrz zadanie):

$$F_{L_2}(x, y) = x + y; F_L(x, y) = F_{K_2}(x, y) = 1.$$

Z warunku C:  $F_{L_1}(x, y) = \frac{1}{x}(F_L(x, y) - yF_{L_2}(x, y)) =$   
 $= \frac{1}{x}(1 - y(x + y)) = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} - y.$

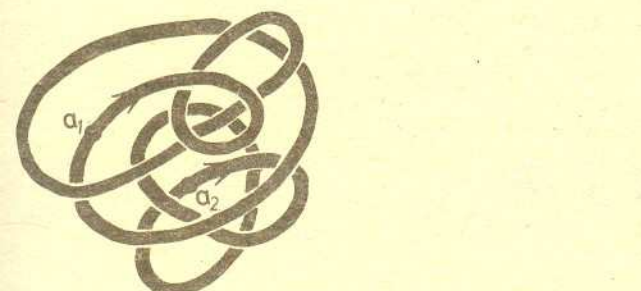
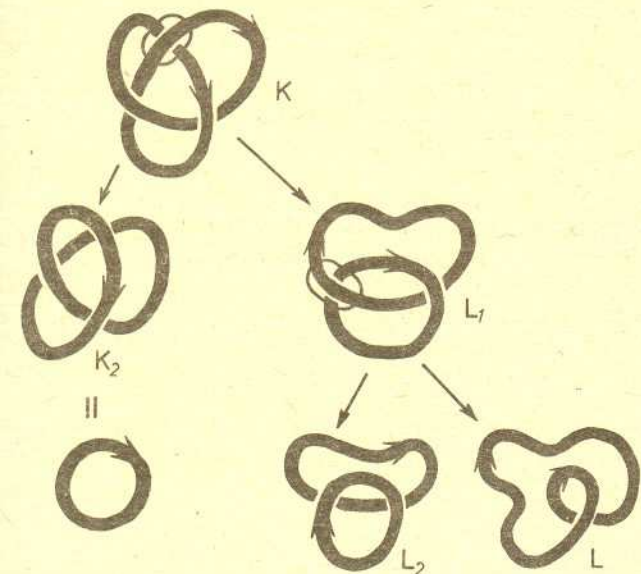
I ostatecznie (znów z warunku C):

$$F_K(x, y) = \frac{1}{x}(F_{L_1}(x, y) - yF_{K_2}(x, y)) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x} - y - y\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} - \frac{2y}{x}.$$

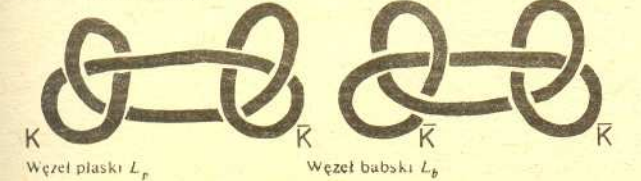
Prawostronny trójlitnik  $\bar{K}$  jest lustrzanym odbiciem lewostronnego.

Tak więc  $F_{\bar{K}}(x, y) = F_K(y, x) = \frac{1}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{2x}{y}$ , czyli  $F_{\bar{K}} \neq F_K$ .



Rys. 7

Do znalezienia wielomianu  $F$  dla węzła babskiego i płaskiego nie musimy wykonywać żadnych rachunków. Wystarczy skorzystać z tego, iż węzeł płaski  $L_p$  jest sumą dwóch różnych trójlitników, a węzeł babski  $L_b$  sumą dwóch prawostronnych trójlitników. Mamy  $F_{L_p}(x, y) = F_{K \# \bar{K}}(x, y) = F_K(x, y) \cdot F_{\bar{K}}(x, y)$ ,  $F_{L_b}(x, y) = F_{\bar{K} \# K}(x, y) = F_{\bar{K}}(x, y) \cdot F_K(x, y)$  i ponieważ  $F_K \neq F_{\bar{K}}$ , więc  $F_{L_p} \neq F_{L_b}$ .



Węzeł płaski  $L_p$       Węzeł babski  $L_b$

zaawansowanych metod topologii algebraicznej. Jednak ostatnio Paweł Traczyk i Józef Przytycki znaleźli elementarny dowód twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności nie tylko wielomianu Conwaya, ale także wielomianu  $F_K$ . Jest on na tyle prosty, że warto przedstawić tutaj jego zarys.

Rozpatrujemy zorientowane sploty przedstawione (niejednoznacznie) za pomocą diagramu na płaszczyźnie. Wielomian  $F_K$  będziemy definiować indukcyjnie względem liczby skrzyżowań w diagramie dbając, by cały czas dla już określonych wielomianów był spełniony warunek C. Zwróćmy też uwagę, że za każdym razem, gdy definiujemy wielomian dla nowego splotu, jest on wyznaczony jednoznacznie przez warunek C.

Niech  $(L, a)$ , gdzie  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , będzie zorientowanym splotem  $L$  o  $n$  składowych z  $n$  wyróżnionymi punktami  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ; po jednym punkcie w każdej składowej (rys. 6). Mówimy, że diagram  $(L, a)$  jest rozwiązany, gdy obchodząc go zgodnie z orientacją i rozpoczynając od punktu  $a_1$ , następnie  $a_2$  itd. aż do punktu  $a_n$ , każde pierwsze raz napotkane skrzyżowanie pokonujemy górną (tak naprawdę oznacza to, że splot jest trywialny).

Dla rozwiązanego diagramu o  $n$  składowych definiujemy  $F_{(L, a)}(x, y) = (x + y)^{n-1}$  (warunek C jest spełniony, porównaj zadanie).

W szczególności zdefiniowaliśmy w ten sposób nasz wielomian dla diagramów bez skrzyżowań (nie zależy on od punktów wyróżnionych).

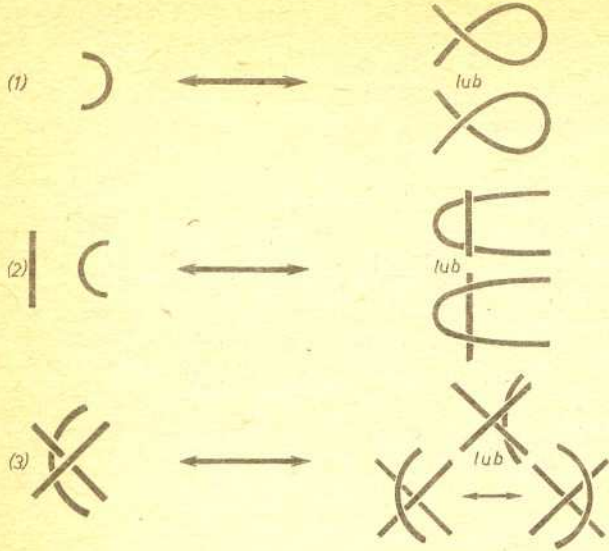
Założmy teraz, że  $F_L$  jest zdefiniowany dla diagramów  $L$  z mniej niż  $k$  skrzyżowaniami (i warunek C jest dla nich spełniony). Rozważmy teraz diagram  $L$  z  $k$  ( $k > 0$ ) skrzyżowaniami. Wielomian  $F_L$  zdefiniujemy w kilku krokach.

**Krok 1.** Wybieramy po jednym punkcie  $a_i$  w każdej składowej i definiujemy  $F_{(L, a)}$  indukcyjnie względem liczby skrzyżowań, które trzeba poprawić (zamienić most na tunel), by otrzymać diagram rozwiązany (tę liczbę „złych” skrzyżowań oznaczmy przez  $s(L, a)$ ). Jeśli  $s(L, a) = 0$ , to diagram jest rozwiązany i  $F_{(L, a)}$  został już określony. Założmy, że  $m \geq 1$  i że jeśli  $s(K, a) < m$ , to  $F_{(K, a)}$  jest już zdefiniowany. Jeśli  $s(L, a) = m$ , to wybieramy w  $L$  pierwsze „złe” skrzyżowanie  $p$ . Oznaczmy przez  $(L_p, a)$  diagram, który otrzymamy z  $(L, a)$  zmieniając w skrzyżowaniu  $p$  most na tunel, a przez  $L_p^0$  diagram otrzymany z  $L$  przez likwidację skrzyżowania  $p$  (rys. 7). Wielomiany  $F_{(L_p, a)}$  i  $F_{L_p^0}$  są już określone ( $L_p^0$  ma mniej skrzyżowań niż  $L$ ;  $s(L_p, a) = s(L, a) - 1 < m$ ).  $F_{(L, a)}$  określamy tak, by był spełniony warunek C, tzn.

$$F_{(L, a)}(x, y) = \frac{1}{x}(F_{L_p^0}(x, y) - yF_{(L_p, a)}(x, y)).$$

**Krok 2.** Pokazujemy, że  $F_L$  nie zależy od wyboru punktu wyróżnionego. Jest to część dość żmudna, ale całkowicie elementarna.

**Krok 3.** Pokazujemy, że warunek C jest nadal spełniony. Dowód jest natychmiastowy i polega na odpowiednim wyborze punktów wyróżnionych. Nie ma w tym nic nadzwyczajnego, bo warunek C był użyty w kroku 1 do definicji.



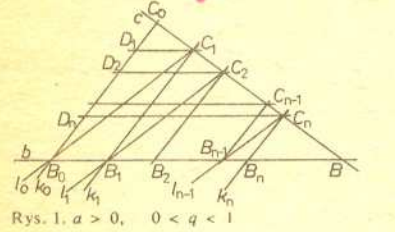
Rys. 8

Pozostaje jeszcze wykazać, że jeśli dwa diagramy opisują ten sam splot, to przypisany im jest ten sam wielomian. Trzeba się tu odwołać do twierdzenia Reidemeistera mówiącego, że jeśli dwa diagramy opisują ten sam splot, to od jednego do drugiego da się przejść za pomocą opisanych obok (rys.8) kroków (tzw. ruchy Reidemeistera). Trzeba jeszcze wykazać, że te ruchy nie zmieniają wielomianu diagramu. Można to zrobić przez indukcję względem liczby skrzyżowań odpowiednio wybierając punkty wyróżnione.

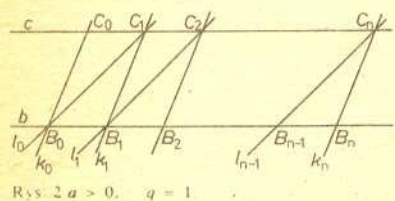
Dowód ten pozwala dalej modyfikować i uogólnić niezmienniki splotów. Można zmieniać równanie w warunku C lub wartość niezmiennika dla węzła trywialnego (dowód nie zmieni się). Jest nadzieja, że odpowiednio dobierając to równanie otrzymamy niezmiennik, który rozróżni jeszcze więcej splotów. Wiadomo jednak, że żaden wielomian tego typu nie rozróżni splotów z rysunku 5.

## Geometrycznie o szeregu geometrycznym

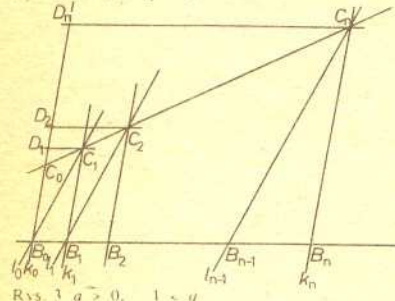
Mgr Andrzej KOK



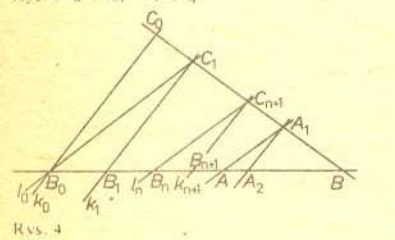
Rys. 1.  $a > 0, 0 < q < 1$



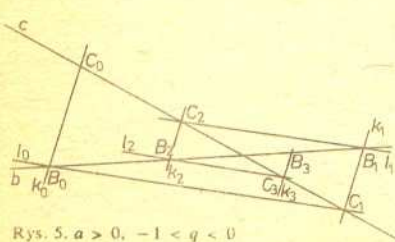
Rys. 2.  $a > 0, q = 1$



Rys. 3.  $a > 0, 1 < q$



Rys. 4



Rys. 5.  $a > 0, -1 < q < 0$

Znane wzory na sumę skończonego i nieskończonego szeregu geometrycznego można znaleźć metodami geometrii.

Weźmy dwie, na razie dodatnie, liczby  $a$  i  $q$ . Na ustalonej prostej  $b$  odkładamy odcinek  $B_0B_1$  o długości  $a$  i przez punkty  $B_0$  i  $B_1$  prowadzimy równoległe proste  $k_0$  i  $k_1$ . Na prostej  $k_0$  wybieramy punkt  $C_0$ , a na prostej  $k_1$  punkt  $C_1$  tak, by  $B_0C_0 = 1, B_1C_1 = q$  oraz punkty  $C_0$  i  $C_1$  leżały po tej samej stronie prostej  $b$ . Prowadzimy teraz prostą  $c$  przez punkty  $C_0$  i  $C_1$  oraz prostą  $l_0$  przez  $B_0$  i  $C_1$ .

Konstruujemy teraz ciągi  $(B_n)$  i  $(C_n)$  punktów należących do prostych  $b$  i  $c$ . Przypuśćmy, że mamy już punkt  $B_{n-1}$ . Prowadzimy przez  $B_{n-1}$  prostą  $l_{n-1} || l_0$  —  $C_n$  jest punktem przecięcia  $l_{n-1}$  z  $c$  — oraz przez  $C_n$  prostą  $k_n || k_0$  —  $B_n$  jest punktem przecięcia  $k_n$  z  $b$ . Ponadto na prostej  $k_0$  wybieramy punkty  $D_1, D_2, \dots$  tak, by proste  $C_nD_n$  były równoległe do  $b$ .

Zauważmy, że punkt  $B_n$  zawsze leży między  $B_0$  i  $B_{n+1}$ , a ponadto dla  $q < 1$  (rys. 1) leży między  $B_0$  i  $B$  — punktem przecięcia prostych  $b$  i  $c$  (wynika to z aksjomatu Pascha).

Trójkąty  $\triangle B_0B_1C_1, \triangle B_1B_2C_2, \dots, \triangle B_{n-1}B_nC_n$  są podobne, również trójkąty  $\triangle B_0C_0C_1, \dots, \triangle B_{n-1}C_{n-1}C_n$  są podobne, tak więc łatwo otrzymujemy  $B_2C_2 = q^2, \dots, B_nC_n = q^n; B_1B_2 = aq, \dots, B_{n-1}B_n = aq^{n-1}$ .

Suma  $a + aq + \dots + aq^{n-1}$  jest zatem długością odcinka  $B_0B_n$ .

Z podobieństwa trójkątów  $\triangle D_1C_1C_0$  i  $\triangle D_nC_nC_0$  mamy  $\frac{C_nD_n}{C_1D_1} = \frac{C_0D_n}{C_0D_1}$ .

Mamy też  $C_nD_n = B_0B_n, C_1D_1 = a$ . Ponadto dla  $0 < q < 1: C_0D_n = C_0B_0 - B_0D_n = 1 - q^n$  i  $C_0D_1 = 1 - q$  (rys. 1), natomiast dla  $q > 1: C_0D_n = q^n - 1, C_0D_1 = q - 1$  (rys. 3).

W obu przypadkach mamy więc  $B_0B_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

Dla  $q \geq 1$  długości odcinków  $B_0B_n$  rosną nieograniczenie.

Istotnie,  $B_0B_n = B_0B_1 + \dots + B_{n-1}B_n \geq n \cdot a$ . Natomiast dla  $0 < q < 1$  ciąg  $(B_n)$  jest zbieżny do punktu  $B$ .

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego punktu  $A \neq B$  z odcinka  $B_0B$  do odcinka  $B_0A$  należy tylko skończenie wiele punktów  $B_n$  (pamiętajmy, że wszystkie należą do odcinka  $B_0B$ ). Jeśli  $B_n \in B_0A$ , to długość  $B_nB_{n+1}$  jest równa co najmniej długości  $AA_2$  (rys. 4), gdzie  $AA_1 || l_0, A_1A_2 || k_0, A_1 \in c, A_2 \in b$ . Tak więc jeśli  $B_n \in B_0A$ , to  $B_0B_n = B_0B_1 + \dots + B_{n-1}B_n \geq n \cdot AA_2$ . Otrzymujemy stąd, że liczba  $n$  musi być mniejsza niż  $\frac{B_0B_n}{AA_2}$ .

Łatwo obliczyć, że  $B_0B = \frac{a}{1 - q}$  (z podobieństwa  $\triangle C_0C_1D_1$  i  $\triangle C_0BB_0$ ).

Tak więc  $a + aq + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1 - q}$  dla  $0 < q < 1$ .

No dobrze, ale jak pozbyć się założenia o dodatniości  $a$  i  $q$ ?

Po prostu należy rozpatrywać odcinki skierowane. Odcinki ujemne równoległe do  $k_0$  odkładamy w dół, a równoległe do  $b$  w lewo (rys. 5).

Pozostawiamy Czytelnikowi wyprowadzenie wzorów na sumy dla  $q < 0$ .