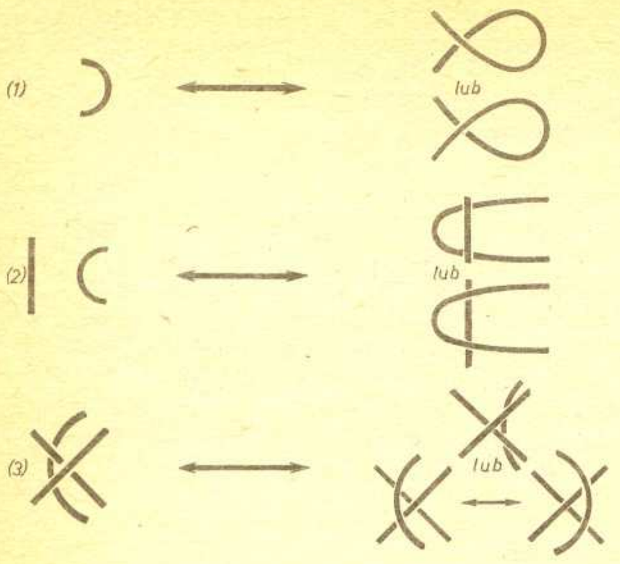


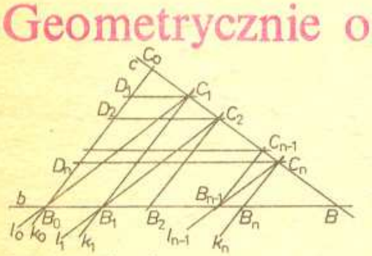
Pozostaje jeszcze wykazać, że jeśli dwa diagramy opisują ten sam splot, to przypisany im jest ten sam wielomian. Trzeba się tu odwołać do twierdzenia Reidemeistera mówiącego, że jeśli dwa diagramy opisują ten sam splot, to od jednego do drugiego da się przejść za pomocą opisanych obok (rys.8) kroków (tzw. ruchy Reidemeistera). Trzeba jeszcze wykazać, że te ruchy nie zmieniają wielomianu diagramu. Można to zrobić przez indukcję względem liczby skrzyżowań odpowiednio wybierając punkty wyróżnione.

Dowód ten pozwala dalej modyfikować i uogólniać niezmienniki splotów. Można zmieniać równanie w warunku **C** lub wartość niezmiennika dla węzła trywialnego (dowód nie zmieni się). Jest nadzieja, że odpowiednio dobierając to równanie otrzymamy niezmiennik, który rozróżni jeszcze więcej splotów. Wiadomo jednak, że żaden wielomian tego typu nie rozróżni splotów z rysunku 5.

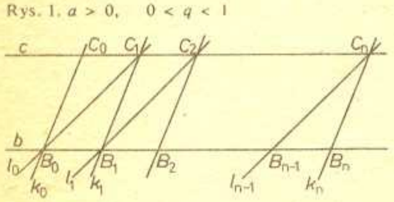
Rys. 8

Geometrycznie o szeregu geometrycznym

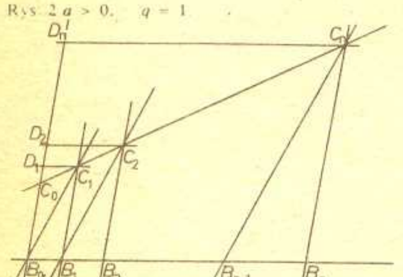
Mgr Andrzej KOK



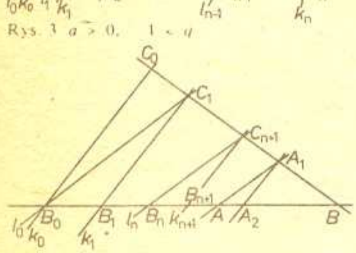
Rys. 1. $a > 0, \quad 0 < q < 1$



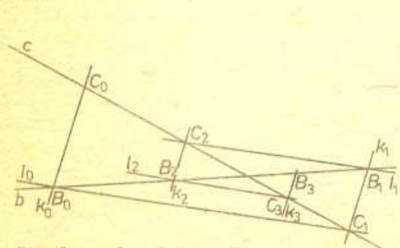
Rys. 2 $a > 0, \quad q = 1$



Rys. 3 $a > 0, \quad 1 < q$



Rys. 4



Rys. 5. $a > 0, \quad -1 < q < 0$

Znane wzory na sumę skończonego i nieskończonego szeregu geometrycznego można znaleźć metodami geometrii.

Weźmy dwie, na razie dodatnie, liczby a i q. Na ustalonej prostej b odkładamy odcinek B_0B_1 o długości a i przez punkty B_0 i B_1 prowadzimy równoległe proste k_0 i k_1. Na prostej k_0 obieramy punkt C_0, a na prostej k_1 punkt C_1 tak, by $B_0C_0 = 1$, $B_1C_1 = q$ oraz punkty C_0 i C_1 leżały po tej samej stronie prostej b. Prowadzimy teraz prostą c przez punkty C_0 i C_1 oraz prostą l_0 przez B_0 i C_1.

Konstruujemy teraz ciągi (B_n) i (C_n) punktów należących do prostych b i c. Przypuśćmy, że mamy już punkt B_{n-1}. Prowadzimy przez B_{n-1} prostą $l_{n-1} \| l_0$ — C_n jest punktem przecięcia l_{n-1} z c — oraz przez C_n prostą $k_n \| k_0$ — B_n jest punktem przecięcia k_n z b. Ponadto na prostej k_0 obieramy punkty $D_1, D_2 \ldots$ tak, by proste C_nD_n były równoległe do b.

Zauważmy, że punkt B_n zawsze leży między B_0 i B_{n+1}, a ponadto dla $q < 1$ (rys. 1) leży między B_0 i B — punktem przecięcia prostych b i c (wynika to z aksjomatu Pascha).

Trójkąty $\triangle B_0B_1C_1, \triangle B_1B_2C_2, \ldots, \triangle B_{n-1}B_nC_n$ są podobne, również trójkąty $\triangle B_0C_0C_1, \ldots, \triangle B_{n-1}C_{n-1}C_n$ są podobne, tak więc łatwo otrzymujemy $B_2C_2 = q^2, \ldots, B_nC_n = q^n$; $B_1B_2 = aq, \ldots, B_{n-1}B_n = aq^{n-1}$.

Suma $a+aq+ \ldots +aq^{n-1}$ jest zatem długością odcinka B_0B_n.

Z podobieństwa trójkątów $\triangle D_1C_1C_0$ i $\triangle D_nC_nC_0$ mamy $\dfrac{C_nD_n}{C_1D_1} = \dfrac{C_0D_n}{C_0D_1}$.

Mamy też $C_nD_n = B_0B_n$, $C_1D_1 = a$. Ponadto dla $0 < q < 1$: $C_0D_n = C_0B_0 - B_0D_n = 1-q^n$ i $C_0D_1 = 1-q$ (rys. 1), natomiast dla $q > 1$: $C_0D_n = q^n-1$, $C_0D_1 = q-1$ (rys. 3).

W obu przypadkach mamy więc $B_0B_n = a+aq+ \ldots +aq^{n-1} = a \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Dla $q \geqslant 1$ długości odcinków B_0B_n rosną nieograniczenie.

Istotnie, $B_0B_n = B_0B_1 + \ldots + B_{n-1}B_n \geqslant n \cdot a$. Natomiast dla $0 < q < 1$ ciąg (B_n) jest zbieżny do punktu B.

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego punktu $A \neq B$ z odcinka B_0B do odcinka B_0A należy tylko skończenie wiele punktów B_n (pamiętajmy, że wszystkie należą do odcinka B_0B). Jeśli $B_n \in B_0A$, to długość B_nB_{n+1} jest równa co najmniej długości AA_2 (rys. 4), gdzie $AA_1 \| l_0$, $A_1A_2 \| k_0$, $A_1 \in c$, $A_2 \in b$. Tak więc jeśli $B_n \in B_0A$, to $B_0B_n = B_0B_1 + \ldots + B_{n-1}B_n \geqslant$ $\geqslant n \cdot AA_2$. Otrzymujemy stąd, że liczba n musi być mniejsza niż $\dfrac{B_0B_n}{AA_2}$.

Łatwo obliczyć, że $B_0B = \dfrac{a}{1-q}$ (z podobieństwa $\triangle C_0C_1D_1$ i $\triangle C_0BB_0$).

Tak więc $a+aq+ \ldots +aq^n+ \ldots = \dfrac{a}{1-q}$ dla $0 < q < 1$.

No dobrze, ale jak pozbyć się założenia o dodatniości a i q?

Po prostu należy rozpatrywać odcinki skierowane. Odcinki ujemne równoległe do k_0 odkładamy w dół, a równoległe do b w lewo (rys. 5).

Pozostawiamy Czytelnikowi wyprowadzenie wzorów na sumy dla $q < 0$.