Czy stawiać wszystko na jedną kartę?

Rozsądna odpowiedź to: czasem tak, czasem nie. A oto problem, z którym mają do czynienia bywalcy kasyn gry: w kieszeni zostało 20 dolarów, bilet do domu kosztuje dwa razy więcej. Można postawić całe 20 dolarów na czerwone w ruletce: wtedy z prawdopodobieństwem 18/37 wygrywamy ile trzeba. (W ruletce mamy 37 liczb od 0 do 36; jeśli wypadnie 0, to kasyno zabiera stawki.) A może warto stawiać po dolarze i powoli ciułać potrzebną sumę?

Warto rozwiązać ogólniejsze „zadanie o ruinie gracza":
Gracze A i B mają łączny kapitał s dolarów, w jednej partii A wygrywa od B dolara z prawdopodobieństwem p i przegrywa do B dolara z prawdopodobieństwem $q = 1-p$. Gdy A ma k dolarów, jakie są szanse, że zostanie zrujnowany?

Niech p_k oznacza szukane prawdopodobieństwo. Jasne, że $p_0 = 1$, z drugiej strony $p_s = 0$. Jeśli A ma k dolarów, to po jednej partii będzie miał $k+1$ dolarów z prawdopodobieństwem p i $k-1$ dolarów z prawdopodobieństwem q. Dlatego

$$p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, s-1.$$

Powyższy układ równań (z „warunkami brzegowymi" $p_0 = 1$, $p_s = 0$) łatwo rozwiązać, gdy $p = q = \frac{1}{2}$. Wtedy po prostu $p_k = \frac{1}{2} p_{k+1} + \frac{1}{2} p_{k-1}$ i widać, że $(p_k)_{k=0}^{s}$ jest ciągiem arytmetycznym. W takim razie $p_k = 1 - \frac{k}{s}$. Gdyby ruletka była grą sprawiedliwą i szansa wygrania podwójnej stawki wynosiła $\frac{1}{2}$, dla $s = 40$ i $k = 20$ mielibyśmy $p_{20} = \frac{1}{2}$. Strategia ryzykanta i strategia ciułacza byłyby równie dobre.

Rozwiążemy teraz nasz układ równań dla $p \neq \frac{1}{2}$ i $p > 0$. Jeśli odrzucić warunki brzegowe, rozwiązaniem może być dowolna stała, tj. $p_k = A$, $k = 1, 2, \ldots, s-1$. Czy istnieją inne? Poszukamy rozwiązania w postaci ciągu geometrycznego.
Jeśli więc $p_k = z^k$, to $z^k = p \cdot z^{k+1} + q \cdot z^{k-1}$, skąd $pz^2 - z + q = 0$. Mamy więc $z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pq}}{2p} = \frac{1 \pm (1-2p)}{2p}$.

Po odrzuceniu przypadku, gdy $z = 1$, pozostaje $z = \frac{q}{p}$, czyli $p_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k$. Zauważmy jeszcze, że $p_k = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^k$ jest też rozwiązaniem; dopasujemy je do warunków brzegowych.

$$\begin{aligned} A + B\left(\frac{q}{p}\right)^0 &= 1 \\ A + B\left(\frac{q}{p}\right)^s &= 0 \end{aligned}, \quad \text{czyli} \quad \begin{aligned} A + B &= 1 \\ A + B\left(\frac{q}{p}\right)^s &= 0. \end{aligned}$$

Stąd $A = \frac{-(q/p)^s}{1-(q/p)^s}$, $B = \frac{1}{1-(q/p)^s}$. Ostatecznie $p_k = \frac{(q/p)^k - (q/p)^s}{1-(q/p)^s}$.

W naszym przykładzie $s = 40$, $k = 20$, $p = \frac{18}{37}$.

$$p_{20} = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^{20} - \left(\frac{19}{18}\right)^{40}}{1 - \left(\frac{19}{18}\right)^{40}} > 0{,}74.$$

Widać, że prawdopodobieństwo ruiny jest dużo większe niż $\frac{19}{37}$.

Morał — im dłużej gra się w grę niesprawiedliwą, tym gorzej się na tym wychodzi.

R. S.

Rozwiązanie zadania F 175. Duża kropla utworzona przez zlanie się mniejszych kropel jest trwała, jeśli jej energia potencjalna jest mniejsza niż suma energii kropli, z których powstała. Na energię kropli składa się energia potencjalna w polu sił ciężkości (proporcjonalna do r) i energia związana z napięciem powierzchniowym (proporcjonalna do r^2). Całkowita energia może więc dla pewnych promieni maleć.
Dla oceny ilościowej rozważmy równoczesne zetknięcie N sferycznych kropel o promieniu r. Wskutek ich adiabatycznego zlania się odpowiednie zmiany energii potencjalnych wynoszą:
(a) Ciężkości

$$\Delta E_g = mg \cdot \Delta r = N \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho g(R-r).$$

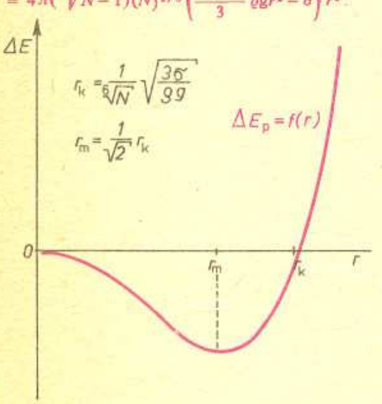
ϱ — gęstość rtęci, g — przyspieszenie swobodnego spadania, R — promień dużej kropli. Ponieważ $R = \sqrt[3]{N} r$, zatem
$\Delta E_g = \frac{4}{3}\pi(\sqrt[3]{N}-1)N\varrho g r^4$.
(b) Powierzchniowej

$$\Delta E_s = \sigma \Delta s = \sigma(4\pi R^2 - 4\pi N r^2).$$

Po przekształceniach $\Delta E_s =$
$= -4\pi(\sqrt[3]{N}-1)\sqrt[3]{N^2}\, r^2 \sigma$.
(c) Całkowitej

$$\Delta E = \Delta E_g + \Delta E_s.$$

Po prostych rachunkach $\Delta E =$
$= 4\pi(\sqrt[3]{N}-1)(N)^{2/3}\left(\frac{\sqrt[3]{N}}{3}\varrho g r^2 - \sigma\right) r^2$.



Z wykresu funkcji $\Delta E = f(r)$ wynika, że stabilne są krople o $r < r_k$.
Dla $N = 2$ mamy $r_k =$
$= \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\sqrt{\frac{3 \cdot 465 \text{ dyn/cm}}{13{,}6 \text{ g/cm}^3 \cdot 981 \text{ cm/s}^2}} \approx 2{,}9$ mm.
W rzeczywistości promień krytyczny jest mniejszy (dlaczego ?). Wszelkie zanieczyszczenia znacznie obniżają wartość napięcia powierzchniowego, nic więc dziwnego, że prowadzi to do drastycznego malenia r_k.