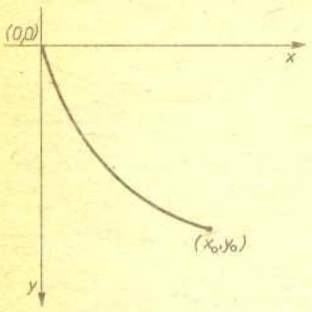
Brachistochrona



Rys. 1

W 1696 roku jeden z braci Bernoullich — Jan — opublikował

Zadanie: Na płaszczyźnie pionowej dane są dwa punkty. Znaleźć taką łączącą je krzywą w tej płaszczyźnie, po której punkt materialny spada w najkrótszym czasie. Zakładamy, że nieistotny jest wpływ tarcia i oporu powietrza.

Gdy punkty leżą jeden nad drugim, rozwiązanie jest natychmiastowe — odcinek. Przyjmijmy więc dodatkowo, że tak nie jest.

Zadanie to można rozwiązać posługując się metodą rachunku wariacyjnego. Rozważmy krzywe, które mogą być „linią spadku punktu materialnego" i funkcjonał przyporządkowujący każdej krzywej czas spadku po niej. Przyjmijmy, że punkt startuje z początku układu współrzędnych, koniec jego drogi ma współrzędne (x_0, y_0) i oś $0y$ jest skierowana zgodnie z siłą ciężkości (rys. 1).

Z mechaniki wiemy, że szybkość $\frac{ds}{dt}$ ruchu punktu materialnego spadającego po krzywej $\{(x, y(x)) : 0 \leqslant x \leqslant x_0\}$ spełnia równanie $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$,

gdzie s jest drogą przebytą przez punkt, ds jest elementem łuku, tzn. $(ds)^2 = (dy)^2 + (dx)^2$.

Tak więc $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$.

Skoro tak, to podstawiając otrzymujemy $dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}\, dx$.

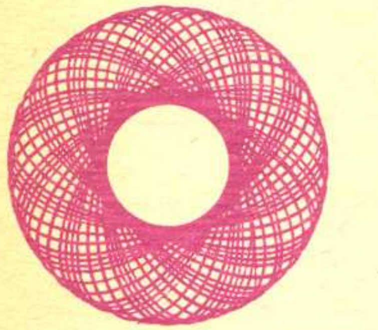
Zatem czas spadku jest równy $V(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}}\, dx$.

Problem został więc sformułowany. W zbiorze takich funkcji $y: [0, x_0] \to [0, y_0]$, że $y(x_0) = y_0$ znaleźć tę, dla której funkcjonał $V(y) = \int\limits_0^{x_0} F(y(x), y'(x))dx$

przyjmuje najmniejszą wartość. Z ogólnej teorii wiadomo, iż jeśli rozwiązanie to, $\bar{y}$, jest dostatecznie wiele razy różniczkowalne, to musi spełniać równanie (jest to tylko warunek konieczny)

(1) $$F(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \bar{y}' F'_{x_2}(\bar{y}(x), \bar{y}'(x)) = \text{const.}$$

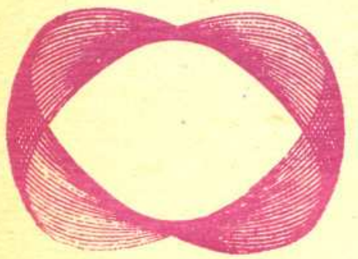
(Dla funkcji F dwóch zmiennych x_1 i x_2 symbol F'_{x_2} oznacza pochodną cząstkową — by ją uzyskać, zmienną x_1 traktujemy jako parametr i tak otrzymaną funkcję zmiennej x_2 różniczkujemy.)



W naszym przypadku $F(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{1 + x_2^2}{x_1}}$ i $F'_{x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1(1 + x_2^2)}}$.

Podstawiając do równania (1) otrzymujemy po uporządkowaniu

(2) $$y \cdot (1 + (y')^2) = c_1.$$

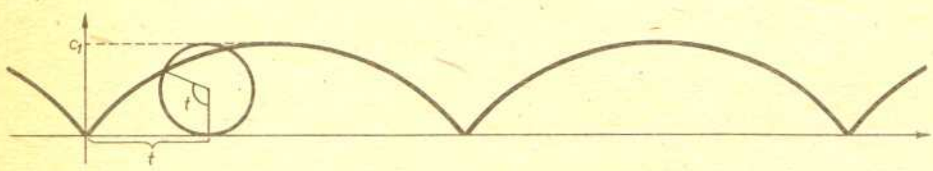


Równanie to rozwiązujemy za pomocą podstawienia. Przyjmijmy $y' = \text{ctg}\, u$,

wówczas $y = c_1 \cdot \sin^2 u = \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2u)$ oraz $\frac{dx}{du} = \text{tg}\, u \cdot \frac{dy}{du} = 2c_1 \sin^2 u = c_1(1 - \cos 2u)$,

czyli $x = \frac{c_1}{2}(2u - \sin 2u) + c_2$ (ale $c_2 = 0$, gdyż $x(0) = y(0) = 0$).

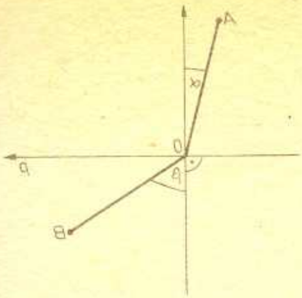
Po podstawieniu $t = 2u$ mamy $x = \frac{c_1}{2}(t - \sin t)$, $\quad y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos t)$.



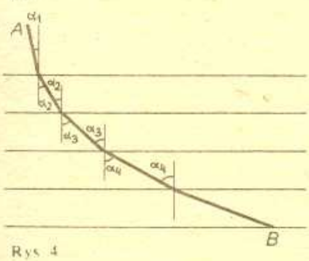
Rys. 2

Znaleziona krzywa nazywa się cykloidą. Ma ona interpretację kinematyczną: punkt okręgu o promieniu $\frac{c_1}{2}$ toczącego się po osi $0x$ zakreśla właśnie cykloidę. Jeśli punkt na okręgu znajdował się w początku układu, to po obrocie okręgu o t znajdzie się w punkcie $\left(\frac{c_1}{2}(t - \sin t), \frac{c_1}{2}(1 - \cos t)\right)$.

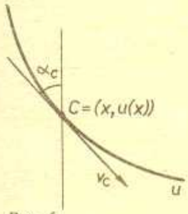
W.N.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Równanie (2) dla funkcji y realizującej minimum czasu możemy otrzymać inaczej. Jak wiadomo (można to zresztą łatwo sprawdzić analitycznie), najszybszą drogą z punktu A do punktu B (rys. 3) przy założeniu, że prędkości V_1 powyżej i V_2 poniżej prostej p są stałe, jest łamana $A\ O\ B$, przy czym zachodzi równość

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Jeśli między A i B mamy pewną liczbę pasów (rys. 4), w których prędkości są stałe, to dla najszybszej drogi muszą zachodzić równości

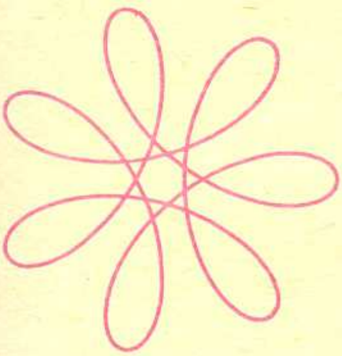
$$\frac{\sin\alpha_1}{V_1} = \frac{\sin\alpha_2}{V_2} = \ldots = \frac{\sin\alpha_n}{V_n},$$

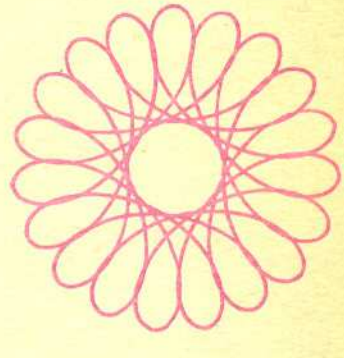
a więc $\dfrac{\sin\alpha_k}{V_k} = \text{const.}$

Jeśli liczba pasów będzie wzrastała nieograniczenie, a szerokość dążyła do zera, innymi słowy prędkość poruszającego się ciała będzie zależała tylko od odległości tego ciała od prostej p, to w każdym punkcie C najszybszej drogi (rys. 5) powinno być spełnione równanie

$$\frac{\sin\alpha_C}{V_C} = \text{const.}$$

W naszym zadaniu wiemy, że $V_C = \sqrt{2gu}$,
z drugiej strony $\text{ctg}\alpha_C = u'(x)$,
tak więc $\sin\alpha_C = \dfrac{1}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}$
i otrzymujemy równanie $u\cdot(1+(u')^2) = \text{const.}$
(Zauważmy, że w rozumowaniu powyższym założyliśmy istnienie rozwiązania — co wcale nie musiało być prawdą. Istnienie takiego rozwiązania trzeba by więc udowodnić innymi metodami.)





Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 401. Danych jest 2^n skończonych ciągów złożonych z zer i jedynek. Żaden z ciągów nie jest początkiem innego. Dowieść, że suma długości tych ciągów nie jest mniejsza niż $n\cdot 2^n$.
Rozwiązanie na str. 15

M 402. Mamy skończony zbiór P punktów płaszczyzny. Każdy trójkąt o wierzchołkach w P ma powierzchnię mniejszą niż 1. Wykazać, że pewien trójkąt o powierzchni mniejszej niż 4 zawiera cały zbiór P.
Rozwiązanie na str. 3

M 403. Znaleźć ostatnie 1000 cyfr liczby $M = 1+40+40^2+\ldots+40^{999}$
Rozwiązanie na str. 14

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 174. Na podstawę szklanego walca padają pod różnymi kątami promienie świetlne. Które z promieni dotrą do drugiej podstawy?
Rozwiązanie na str. 2

F 175. Obserwując zachowanie rozlanej rtęci stwierdzamy, że niewielkie kropelki zlewają się chętniej niż duże. Jak wyjaśnić to zjawisko?
Rozwiązanie na str. 16

Rozwiązanie węzłów

Aby pokazać, że $F_K(x,y) = F_{K'}(x,y)$, wystarczy zastosować regułę z warunku C do skrzyżowania p w K i do skrzyżowania q w K':