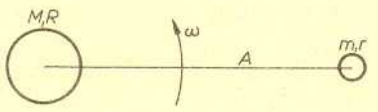
Granica Roche'a i powierzchnia Roche'a

Dr Tomasz KWAST

Nazwisko francuskiego matematyka Edouarda Roche'a (1820—1883) wiąże się z dwoma zagadnieniami należącymi formalnie do dziedziny mechaniki nieba, a które swoimi konsekwencjami daleko wykraczają poza mechanikę.



Rys. 1

Na początek (rys. 1) załóżmy, że po kole o promieniu A obiega planetę o masie M i promieniu R satelita o masie m i promieniu r synchroniczny (tzn. którego okres obrotu jest równy okresowi obiegu, jak w przypadku naszego Księżyca). Z założenia ruchu po kole wynika, że przyspieszenie odśrodkowe centrum satelity jest równe (co do wartości bezwzględnej) jego przyspieszeniu grawitacyjnemu ze strony planety, czyli

$$\omega^2 A = \frac{GM}{A^2},$$

gdzie ω oznacza prędkość kątową satelity, a G stałą grawitacji. Ściśle mówiąc, satelita krąży nie wokół środka planety, lecz wokół środka masy całego układu, czyli po kole o promieniu $AM/(M+m)$, jednak nieścisłość tę można zaniedbać, gdy satelita jest „mały" w stosunku do swojej planety. Tak czy inaczej wypadkowe przyspieszenie środka masy satelity jest równe zeru.

Obliczmy teraz różnicę tych samych przyspieszeń (odśrodkowego i grawitacyjnego) w najbardziej odległym od planety punkcie satelity — będzie to tzw. przyspieszenie przypływowe Δa. Punkt ten obiega planetę po kole o promieniu $A+r$, zatem

$$\Delta a = \omega^2 (A+r) - \frac{GM}{(A+r)^2} = \frac{GM}{A^3}(A+r) - \frac{GM}{\left[A\left(1+\frac{r}{A}\right)\right]^2} \approx$$

$$\approx \frac{GM}{A^2} + \frac{GM}{A^2}\frac{r}{A} - \frac{GM}{A^2} + \frac{GM}{A^2}\, 2\frac{r}{A} = 3\frac{GM}{A^3} r.$$

Skorzystaliśmy tu z liniowego przybliżenia $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1-2x$, gdzie x oznacza wielkość małą względem jedności. Analogiczny rachunek dla punktu satelity leżącego najbliżej planety dowodzi, że przyspieszenie przypływowe w nim wynosi — Δa. Satelita jest zatem rozciągany w kierunku prostej łączącej go z planetą, gdyby więc był ciekły, to nie mógłby zachować kształtu kulistego, w ogóle zaś może utrzymać się w całości, gdy Δa nie przekracza jego własnego przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni, czyli gdy

$$3\frac{GM}{A^3} r < \frac{Gm}{r^2}, \quad \text{skąd } A^3 > 3\frac{M}{m} r^3.$$

4. Współrzędne czasoprzestrzenne

Wynik doświadczenia Michelsona i Morleya nie oznacza, że trzeba odrzucić ideę eteru. Proponowano kilka wyjaśnień, które „ratowały" eter. Jednak część z nich okazała się niezgodna z wynikami innych eksperymentów, a pozostałe wymagały przyjęcia wzajemnie sprzecznych własności eteru. Niezależnie od powodzenia tych prób warto zauważyć, że założenie istnienia eteru oznacza rezygnację z przeniesienia zasady względności na zjawiska elektromagnetyczne.

Wszystkie współczesne eksperymenty są zgodne z dwoma postulatami, na których opiera się szczególna teoria względności:

1. Żaden z inercjalnych układów współrzędnych nie jest wyróżniony.
2. Światło niezależnie od kierunku, w którym się rozchodzi, ma (w próżni) względem dowolnego inercjalnego obserwatora tę samą prędkość.

Pierwszy postulat jest rozszerzeniem zasady względności Galileusza na wszystkie zjawiska fizyczne. Drugi natomiast nadaje wyjątkowe znaczenie prędkości światła. Prędkości wszystkich innych obiektów są względne, tj. zależą od prędkości i kierunku ruchu obserwatora. Prędkość światła jest dla każdego obserwatora taka sama.

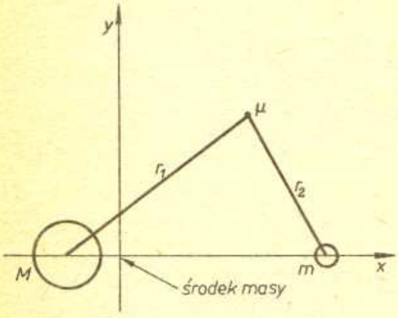
Do tej pory zakładaliśmy, że każdemu obserwatorowi inercjalnemu można przypisać pewien układ współrzędnych w czasoprzestrzeni. Trzeba jednak pamiętać, że obserwator powinien taki układ „zbudować", tj. opracować metodę doświadczalnego wyznaczania czasu i miejsca dowolnego zdarzenia.

Załóżmy, że płaszczyzna kartki to nasza dwuwymiarowa czasoprzestrzeń, w której linie świata światła reprezentowane są przez proste nachylone pod kątem 45° do krawędzi kartki.

Przy równych gęstościach satelity i planety daje to warunek na istnienie satelity

$$A > \sqrt[3]{3}\,R.$$

Tak „odkryliśmy" istnienie najmniejszej odległości od planety, poniżej której satelita (ciekły!) musi zostać rozerwany przez siły przypływowe. Jest to tzw. granica Roche'a. Wynik nasz jest co prawda ilościowo zły, ale dokładniejsze obliczenia prowadzą tylko do innego współczynnika przy R, mianowicie równego 2,455. Najważniejszy wniosek jest ten sam — ciekły satelita może istnieć tylko poza granicą Roche'a. Naszemu Księżycowi (nawet gdyby był ciekły) nic nie grozi ze strony Ziemi — całe szczęście ! Ale np. pierścienie Saturna leżą całkowicie poniżej granicy Roche'a dla Saturna. Nasuwa się więc możliwość, że może powstały one w wyniku rozerwania jakiegoś ciała, które za bardzo zbliżyło się do Saturna — niestety, nie mamy na razie pewności, czy było tak rzeczywiście.



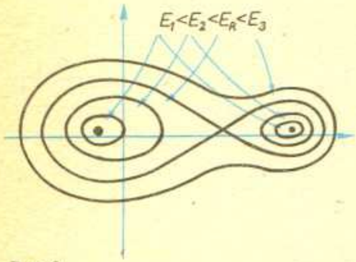
Rys. 2

A teraz zupełnie inny problem. Niech nadal po kole obiegają się dwa ciała o masach M i m, a w ich wspólnym polu grawitacyjnym niech porusza się cząstka o znikomej masie μ, tzn. nie zakłócająca ruchu dwóch ciał „ciężkich". Ruch tej cząstki wygodnie jest przedstawiać w układzie współrzędnych wirującym wraz z masami ciężkimi, czyli np. tak, by masy te stale leżały na osi x (rys. 2). Ruch cząstki może być bardzo skomplikowany, z góry jednak możemy przewidzieć, że jej całkowita energia cały czas musi być stała. Wyrażenie na energię w tym wirującym (a więc nieinercjalnym!) układzie współrzędnych ma postać

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2+y^2) - \frac{GM}{r_1} - \frac{Gm}{r_2}.$$

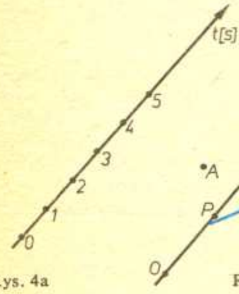
Pierwszy składnik jest energią kinetyczną, drugi uwzględnia, że układ współrzędnych wiruje (jest to potencjał przyspieszenia odśrodkowego), a dwa pozostałe to energie potencjalne względem obu mas. Skoro energia kinetyczna jest z natury rzeczy ograniczona od dołu wartością równą zeru, to suma trzech pozostałych składników musi mieć (przy konkretnej energii całkowitej, lub inaczej — przy konkretnych warunkach początkowych ruchu) ograniczenie od góry. Oznacza to, że ruch cząstki może odbywać się tylko wewnątrz odpowiedniej powierzchni ekwipotencjalnej (zwanej też powierzchnią zerowej prędkości), czyli w obszarze, w którym

$$\frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2+y^2) + \frac{GM}{r_1} + \frac{Gm}{r_2} > -E.$$

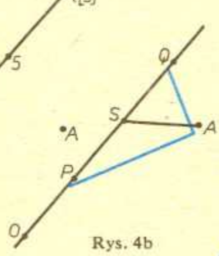


Rys. 3

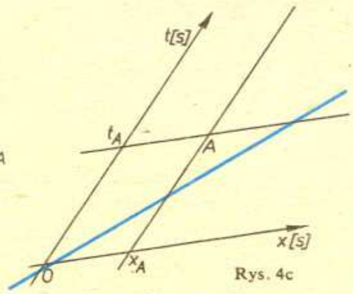
Gdy energia całkowita E ma dużą wartość ujemną, warunek ten może zostać spełniony albo dostatecznie daleko od całego układu (o czym dalej nie będziemy mówić, gdyż nie jest to istotne dla tytułowego zagadnienia), albo dostatecznie blisko którejś z mas (np. wewnątrz powierzchni oznaczonej E_1 na rys. 3). Przy większej energii (E_2) obszary dozwolone dla ruchu wokół mas są większe, wreszcie przy pewnej jej wartości (E_R) łączą się w jednym punkcie tworząc tzw. powierzchnię Roche'a. Przy energii jeszcze większej (E_3) powierzchnia zerowej prędkości ma już postać biszkopta lub hantli.



Rys. 4a



Rys. 4b



Rys. 4c

Narysujmy linię świata obserwatora w poruszającym się swobodnie statku kosmicznym i zdarzenie A, którego współrzędne czasoprzestrzenne chce wyznaczyć (rys. 4a). Linia świata kosmonauty jest jednocześnie osią czasu jego układu współrzędnych wyskalowaną przez wskazania jego zegara. Kosmonauta może wysyłać i odbierać sygnały świetlne. Niech zdarzenie A polega na odbiciu sygnału wysłanego w P. Odbity sygnał został odebrany w Q (rys. 4b). Jedyna dostępna obserwatorowi informacja to wskazania zegara w Q i P. Ponieważ prędkość światła nie zależy od ruchu obserwatora, jest ona w kierunku „tam" taka sama jak „z powrotem". Czas ruchu impulsu do chwili odbicia jest równy połowie czasu, jaki upłynął od P do Q (Czytelnikowi pozostawiamy szczegółowe uzasadnienie tego wniosku). Zdarzenie S dzielące odcinek PQ na połowy jest więc równoczesne — według kosmonauty — ze zdarzeniem A. Przypisze on zdarzeniu A wskazanie swojego zegara w punkcie S.

Odległość zdarzenia A od obserwatora jest równa drodze, którą przebędzie światło w czasie między zdarzeniami P i Q. Naturalnymi jednostkami odległości są tu sekundy świetlne. Prędkość w tych jednostkach jest wielkością bezwymiarową. Łatwo wykazać, że odległość (w sekundach świetlnych) zdarzenia A od obserwatora jest równa długości odcinka SA, a wszystkie zdarzenia równoczesne z S tworzą prostą, do której należy ten odcinek. Prosta ta może pełnić rolę osi odległości od obserwatora. Przesuńmy ją równolegle od punktu O, w którym zegar wskazuje czas zerowy. To, co otrzymaliśmy, jest poszukiwanym układem współrzędnych w czasoprzestrzeni (rys. 4c).

Czytelnikowi pozostawiamy do wykazania, że: 1) wszystkie zdarzenia, które obserwator uważa za równoodległe, leżą na prostej równoległej do osi czasu i 2) linia świata światła przechodząca przez O jest dwusieczną kąta między osią czasu i osią odległości. (cdn.)