

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań z numeru 11/1984

Zbigniew Bartold	- Gdynia	48,97pkt
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	48,48pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	47,27pkt
Kazimierz Serbin	- Sanok	46,79pkt
Ryszard Mazurek	- Wrocław	44,97pkt
Piotr Figurny	- Lubartów	43,78pkt
Jerzy Mikuta	- Zielona G.	43,53pkt
Krzyszyna Witek	- Ostrów Maz.	41,86pkt

Współczynniki trudności zadań 97, 98, 99:  
1,77    2,94    1,85

W Klubie 44: panowie Z. Bartold, R. Pagacz,  
T. Rawlik po raz drugi; K. Serbin,  
R. Mazurek po raz pierwszy.

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/1985

Przypominamy treść zadań:

103. Wielokąt foremny  $W$  o nieparzystej liczbie boków jest wpisany w okrąg, a  $P$  jest dowolnym punktem tego okręgu. Dowiódź, że można podzielić zbiór wierzchołków wielokąta  $W$  na dwa rozłączne podzbiory  $A$  i  $B$  tak, by suma odległości punktu  $P$  od punktów zbioru  $A$  była równa sumie odległości punktu  $P$  od punktów zbioru  $B$ .

104. Wyznaczyć część całkowitą liczby  $\sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}}$

103. Gdy  $P$  jest jednym z wierzchołków  $W$ , teza jest oczywista. Załóżmy więc, że  $P$  nie jest wierzchołkiem i ponumerujmy wierzchołki  $W$  kolejno:  $C_1, \dots, C_n$  tak, by punkt  $P$  leżał na łuku  $C_n C_1$ . Pokażemy, że zbiory  $A = \{C_1, C_3, \dots, C_n\}$  i  $B = \{C_2, C_4, \dots, C_{n-1}\}$  spełniają warunek postawiony w zadaniu. Oznaczmy przez  $a$  długość boku, a przez  $b$  długość najkrótszej przekątnej wielokąta  $W$  i przyjmijmy  $x_i = PC_i$ ,  $u = x_1 + x_3 + \dots + x_n$ ,  $v = x_2 + x_4 + \dots + x_{n-1}$ . Należy dowieść, że  $u = v$ . Stosując twierdzenie Ptolemeusza do czworokątów  $PC_{i-1}C_iC_{i+1}$ ,  $1 < i < n$ , oraz do czworokątów  $PC_1C_2C_n$ ,  $PC_1C_{n-1}C_n$  dostajemy układ równości

$$\begin{aligned} bx_i &= ax_{i-1} + ax_{i+1}, & 1 < i < n, \\ bx_1 &= ax_2 - ax_n, \\ bx_n &= ax_{n-1} - ax_1. \end{aligned}$$

Dodajemy stronami te równości, w których po lewej stronie występuje  $x$  z nieparzystym wskaźnikiem, a następnie dodajemy stronami równości pozostałe. W wyniku sumowania otrzymujemy odpowiednio

$$bu = 2av - ax_1 - ax_n \quad \text{oraz} \quad bv = 2au - ax_1 - ax_n,$$

skąd  $(2a+b)u = (2a+b)v$ , czyli  $u = v$ .

104. Oznaczmy przez  $s_n$  sumę  $\sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$ . W łatwej do sprawdzenia nierówności

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < 1/\sqrt{k} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$$

przyjmujemy kolejno  $k = 2, 3, \dots, n$ , sumujemy stronami otrzymane nierówności i jeszcze dodajemy do wszystkich członów liczbę 1.

Dostajemy:  $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 < s_n < 2\sqrt{n} - 1$ .

Lewa strona ostatniej nierówności jest większa od  $2\sqrt{n} - 2$ . Jeśli więc  $n$  jest pełnym kwadratem, to  $[s_n] = 2\sqrt{n} - 2$ . Dla  $n = 10^6$  mamy wynik 1998.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/1985

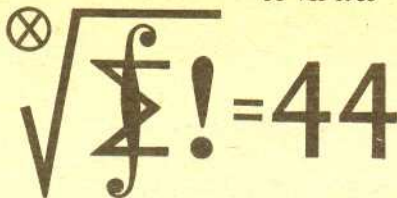
Przypominamy treść zadań

1. Znaleźć opór między punktami  $A$  i  $B$  nieskończonej, płaskiej sieci o kwadratowych oczkach, złożonej z jednakowych oporów  $r = 100\Omega$ , która została przerwana między tymi punktami.

2. Wyjaśnić mechanizm powstawania dźwięku podczas wirowania trzymanej za jeden koniec plastikowej, karbowanej rury.

1. Oznaczmy szukany opór zastępczy przez  $r_{AB}$ . Po połączeniu punktów  $A$  i  $B$  oporem  $r$  opór zastępczy między punktami  $A$  i  $B$  sieci „kompletnej” wyniesie  $r'_{AB} = \frac{r \cdot r_{AB}}{r + r_{AB}}$  (połączenie równoległe oporów). Zastosujemy teraz następujące rozumowanie zakładając, że do  $A$  przyłożony jest dodatni potencjał względem  $B$ . Jeśli oba punkty byłyby nieskończenie odległe, prąd  $i$  wypływający z  $A$  rozkładałby się równomiernie na cztery najbliższe oporniki — po  $\frac{1}{4} i$ , podobnie byłoby z prądem dopływającym z sieci do  $B$ . Po zbliżeniu punktów  $A$  i  $B$  płynące w sieci prądy stanowią sumę prądów płynących od  $A$  oraz do  $B$  w przypadku powyższym. Wobec tego przez opór  $r$  łączący  $A$  i  $B$  będzie płynął prąd  $\frac{1}{2} i$ . Zatem napięcie między tymi punktami będzie wynosiło  $U_{AB} = \frac{1}{2} ri$ . Stąd wyznaczamy  $r'_{AB} = \frac{U_{AB}}{i} = \frac{1}{2} r$ . Podstawiając to do pierwszego równania uzyskujemy  $r_{AB} = r = 100\Omega$ .

2. Przy wirującym końcu rury ciśnienie powietrza obniża się na skutek szybkiego ruchu (zjawisko Bernoulliego), co powoduje przepływ powietrza wewnątrz rury. Dzięki karbowaniom powietrze to zostaje pobudzone do drgań, których częstość zależy od odległości między kolejnymi karbowaniami i od prędkości strumienia powietrza. Z pewnego zakresu generowanych częstości wzmocnieniu ulega częstość rezonansowa rury otwartej na obu końcach, która jest też słyszalna. Przy zwiększeniu szybkości wirowania zwiększa się szybkość przepływu powietrza wewnątrz rury i częstości generowanych drgań ulegają podwyższeniu. Dzięki temu staje się możliwe pobudzenie wyższej częstości rezonansowej rury, co się objawia skokowym przejściem do wyższego tonu.

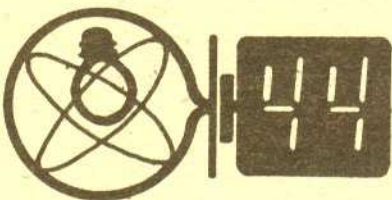


Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

111. Czy istnieje w przestrzeni ograniczony zbiór wypukły  $W$  o następujących własnościach:
- powierzchnia (brzeg) zbioru  $W$  ma w każdym punkcie płaszczyznę styczną;
  - przez każdy punkt zbioru  $W$  przechodzi odcinek zawarty w  $W$ , o długości równej średnicy zbioru  $W$ ;
  - $W$  nie jest kulą?

112. Wykazać, że równanie  $x^n + y^n = z^{2n+1}$  ma dla każdej liczby naturalnej  $n$  nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych  $x, y, z$ .

Zadanie 112 przysłał pan Werner Mnich z Opola.



Redaguje dr Andrzej NADOLNY

## Zadania z fizyki nr 9, 10

9. Znaleźć ciśnienie pary nasyconej (tzn. pozostającej w równowadze termodynamicznej z cieczą) nad powierzchnią cieczy, która zawiera rozpuszczoną substancję nielotną w ilości  $x$  moli na 1 mol cieczy ( $x \ll 1$ ). Ciśnienie pary nasyconej nad czystą cieczą wynosi w tej samej temperaturze  $p_0$ .

10. W książkach fantastyczno-naukowych można niekiedy spotkać opisy bliźniaczej planety Ziemi, która porusza się po tej samej, co Ziemia, orbicie, lecz z przeciwległej strony Słońca. Jakie byłyby parametry optymalnej orbity pojazdu kosmicznego wysłanego z Ziemi na tę planetę? Zakładamy, że orbita Ziemi jest kołowa.

Zadanie 9 przysłał pan Wojciech Wałęcki z Warszawy

## Mapa nieba sprzed 2000 lat

*Jestem wszystkim, co jest, co było i co będzie; zaden śmiertelnik nie podniósł mojej zasłony* — napis na świątyni w Sais.

Wiedza astronomiczna mieszkańców starożytnego Egiptu powiązana ściśle ze światem magii i kultu nadal pozostaje okryta zasłoną tajemniczości. W przeciwieństwie do Babilonii i Chin nie znaleziono dotychczas egipskich, systematycznie prowadzonych obserwacji planet czy zaćmień Słońca. Odkryto natomiast płaskorzeźby i malowidła o tematyce astronomicznej, pokrywające ściany świątyń i grobowców. Do najciekawszych zabytków tego typu należy przedstawiony na ilustracji obok słynny zodiak z Dendery odkryty w maju 1799 roku przez żołnierzy francuskich uczestniczących w wyprawie Napoleona I do Egiptu. Ten kamienny krąg o średnicy ponad 1,5 metra znaleziono w doskonale zachowanej świątyni Hathor w Denderze, na zachodnim brzegu Nilu, około 400 kilometrów na południe od Kairu. Budowę tej świątyni rozpoczęto w okresie rządów Ptolemeuszów przypuszczalnie około 125 roku p.n.e., a zakończono w czasie panowania cesarza Tyberiusza w 34 roku naszej ery. Tak więc kamienny krąg wypełniony figurami bogów i zwierząt powstał mniej więcej 2000 lat temu.

Z łatwością odszukamy na nim dwanaście tradycyjnych znaków zodiaku, które nie występują na wcześniejszych zabytkach egipskich i w związku z tym przypisuje się pochodzenie tych znaków Babilończykom. Pomiędzy figurami zodiaku niemiecki badacz Heinrich Brugsch w ubiegłym stuleciu odszukał symbole Merkurego (powyżej Raka), Wenus (pomiędzy Rybami i Wodnikiem), Marsa (ponad Koziorożcem), Jowisza (tuż pod Rakiem) i Saturna (pomiędzy Panną i Wagą). Symbole planet umieszczono prawdopodobnie w miejscach ich największych wpływów zgodnie z ówczesnymi wyobrażeniami astrologicznymi. W centrum kręgu znajdujemy gwiazdozbiory okołobiegunowe przedstawione w postaci hipopotama i udźca wołowego. Symbole te malowano również na ścianach grobowców począwszy od połowy II tysiąclecia przed naszą erą aż do czasów rzymskich. Poniżej Byka i Bliźniąt umieszczono sylwetkę Ozyrysa odpowiadającą konstelacji Oriona oraz zwierzęcą postać bogini Izdy (Izisz) przedstawiającą Syriusza — najjaśniejszą gwiazdę nocnego nieba, której pojawienie się tuż przed wschodem Słońca zwiastowało wylew Nilu i określało początek egipskiego nowego roku. Znaczenie pozostałych symboli nie zostało do końca wyjaśnione, lecz to, co wiemy, wystarczy do stwierdzenia, że zodiak z Dendery — eksponowany obecnie w Luwrze — jest kamienną mapą nieba, na której oprócz gwiazdozbiorów zaznaczono także położenia planet, a całość opisano znakami astrologicznymi i religijnymi.

mgr Krzysztof WŁODARCZYK

