

Dr hab. Aleksandra KOPYSTYŃSKA

Rozwiązanie zadania M 398. Dla  $n = 1$  teza zadania jest oczywista. Przypuśćmy teraz, że zbiór  $S = \{A_1, \dots, A_k\}$  jest żądanym zbiorem dla pewnego  $n$ . Weźmy taki wektor  $v$  o długości 1, że dla dowolnych  $i, j \leq k$ ,  $i \neq j$  odległość punktów  $A_i$  oraz  $A_j + v$  jest różna od 1 (dla ustalonej pary  $i, j$  są co najwyżej dwa takie wektory  $v$ , że  $A_i + v$  jest odległe od  $A_j$  o 1). Tak więc zbiory  $S$  i  $S' = \{A_1 + v, \dots, A_k + v\}$  są rozłączne oraz dla każdego  $i \leq k$  istnieje dokładnie jeden  $(A_i + v)$  punkt w zbiorze  $S'$  odległy od  $A_i$  o 1, a w zbiorze  $S$  dokładnie jeden  $(A_i)$  punkt odległy od  $A_i + v$  o 1. Tak więc zbiór  $S \cup S'$  jest żądanym zbiorem dla  $n + 1$ .

Rozwiązanie zadania M 399. Niech  $a_k$  będzie największą spośród liczb  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ . Mamy wówczas  $a_{k-1} - 8a_k + 7a_{k+1} \geq 0$ , czyli  $8a_k \leq a_{k-1} + 7a_{k+1}$  i wobec  $a_k \geq a_{k-1}$ ,  $a_k \geq a_{k+1}$  musi być  $a_k = a_{k-1} = a_{k+1}$ . Przez indukcję otrzymujemy  $a_1 = a_2 = \dots = a_k = \dots = a_{100} = 1$ .

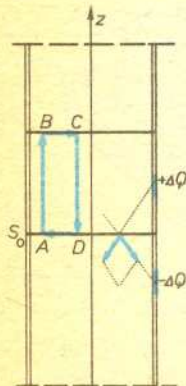
Rozwiązanie zadania F 172. Z symetrii rozkładu ładunku wynika (patrz rysunek), że wewnątrz pręta w każdym punkcie przekroju  $S_0$  ( $x = 0$ ) wektor natężenia pola jest równoległy do osi pręta.

Pole elektrostatyczne dla  $z = \text{const} \neq 0$  jest takie samo jak na  $S_0$ . Wynika to z następującego rozumowania. Korzystając z prawa Gaussa można łatwo wykazać, że we wnętrzu naładowanego ze stałą gęstością powierzchniową walcia nie ma pola elektrostatycznego. Tak więc, jeśli na powierzchnię pręta wprowadzimy dodatkowy, równomiernie rozłożony ładunek, to pole wewnątrz pręta nie ulegnie zmianie. Przesunięciem się natomiast miejsce o zerowej gęstości ładunku powierzchniowego. Ponieważ dodatkowy ładunek może mieć dowolną gęstość, pole elektrostatyczne wewnątrz pręta nie zależy od  $z$ .

Niezależność pola od odległości od osi pręta wynika z tego, że praca sił pola elektrostatycznego przy przesuwaniu ładunku po dowolnej zamkniętej drodze jest równa zero. Dla konturu  $ABCD$

$$AW = qE_A \cdot AB + qE_D \cdot CD = 0,$$

a stąd  $E_A = E_D$ .



Marzenie fizyków przejawiające się w często wypowiedzanym zdaniu: „...wyobraźmy sobie pojedynczy, nieruchomy atom, na który pada promieniowanie...”, zostało zrealizowane dopiero w 1979 roku przez dwie niezależnie pracujące grupy naukowców w Heidelbergu (RFN) i w Boulder (USA). Nie był to co prawda atom, lecz jon, jednakże z punktu widzenia spektroskopii jon niczym nie różni się od obojętnego elektrycznie atomu. Nie należy sądzić, że realizacja tego marzenia była celem samym w sobie. Wszelkie dotychczas uzyskane doświadczalne informacje dotyczące struktury energetycznej pojedynczego atomu pochodzą z badania oddziaływania promieniowania ze zbiorem atomów znajdujących się w fazie gazowej. Ponieważ atomy w zbiorze poruszają się z dużymi prędkościami i ponadto zderzają się ze sobą i ze ścianami naczynia, w którym się znajdują, wyniki doświadczenia są obarczone znaczną niepewnością. W wielu przypadkach wynik pomiaru jest całkowicie zdominowany przez te szkodliwe efekty. Istnieją metody, które kompensują skutki lub nawet częściowo eliminują przyczyny zjawisk uniemożliwiających pomiary najsłabszych struktur poziomów energetycznych atomu. Dane na temat tych struktur są bardzo cenne, ponieważ mówią o rodzaju i sile oddziaływań występujących w atomie. Całkowita eliminacja zjawisk wynikających z ruchu atomów (jednym z nich jest dopplerowskie poszerzenie linii widmowej) czy ich zderzeń (zderzeniowe poszerzenie linii widmowej) możliwa jest dopiero w przypadku uwięzienia pojedynczego atomu. Oczywiście to samo dotyczy cząsteczek lub jonów. Jednakże jony, w przeciwieństwie do cząstek obojętnych, można stosunkowo łatwo zlokalizować stosując pola elektryczne i magnetyczne o odpowiedniej konfiguracji.

Spróbujemy wyjaśnić, dlaczego dopiero kilka lat temu udało się utrzymać pojedynczy jon w ściśle określonym miejscu przez 30 minut tak, że można go było swobodnie obejrzeć i sfotografować. Odpowiemy też na pytanie, co zrobić, żeby zobaczyć pojedynczy jon czy atom.

Wyobraźmy sobie, że atom ma kształt kulki o średnicy kilku angstromów ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ). Nasze oko wyraźnie rozróżnia obiekty o rozmiarach nie mniejszych od milimetra. Czy nie wystarczyłoby więc zastosować powiększenie 10 milionów razy, żeby zobaczyć atom? Pomijając nawet kłopoty techniczne (nie ma mikroskopu o takim powiększeniu) nie zostałyby spełnione jeszcze inne warunki.

Atomy w fazie gazowej są swobodne i znajdują się w nieustannym ruchu. W  $1 \text{ cm}^3$  gazu w warunkach normalnych jest niewyobrażalnie duża liczba  $N = 2,69 \cdot 10^{19}$  atomów. W stanie równowagi termodynamicznej energie kinetyczne tych atomów są opisane funkcją rozkładu Maxwella. Średnia wartość energii kinetycznej w zbiorze atomów wynosi  $\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT$ , gdzie  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$  jest stałą Boltzmann, a  $T$  oznacza temperaturę w skali Kelvina. Jak widać, średnia energia kinetyczna atomów jest wprost proporcjonalna do temperatury. Z drugiej strony, średnia energia kinetyczna jest określona wzorem  $\bar{E}_k = \frac{m\bar{v}^2}{2}$ , w którym  $m$  oznacza masę atomu, a  $\bar{v}^2$  jest średnią kwadratu prędkości atomów w gazie. Zmniejszenie prędkości atomów jest więc równoważne obniżeniu temperatury gazu. Rozkład prędkości atomów w gazie obliczamy z rozkładu energii korzystając z definicji energii kinetycznej. W temperaturze

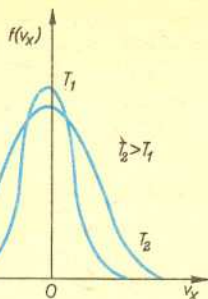
$T = 300 \text{ K}$  średnia prędkość atomów ( $|\bar{v}| = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ ) jest rzędu  $1 \text{ km/s}$ . Rozumiemy teraz

dlaczego zastosowanie mikroskopu o zdolności powiększającej 10 milionów razy nie wystarczy do zobaczenia pojedynczego atomu. Czy dostrzegliśmy obiekt, który z tak zawrotną prędkością przemknąłby przez nasze pole widzenia? Oczywiście, że nie. Musimy go więc zatrzymać i to w ściśle określonym miejscu, a następnie zmusić, by dał nam znać, że jest w pułapce. Jak to zrobić?

Zakładamy, że interesujące nas atomy są z grubsza zlokalizowane i obszar, w którym się znajdują, oświetlamy ukierunkowaną wiązką promieniowania laserowego o wąskim rozkładzie częstości. Atomy są cząstkami tak małymi, że zwykle, nierezonansowe rozpraszanie światła nie jest w stanie ich uwidocznić. Prawdopodobieństwo rozpraszania światła na atomach jest bardzo małe, lecz ogromnie wzrasta, gdy częstość tego światła jest w rezonansie z częstością  $\nu_0$  odpowiadającą przejściom między stanem podstawowym i pierwszym stanem wzbudzonym atomu. Czy jednak wszystkie atomy zbioru, mimo że są identyczne, mają tę samą częstość rezonansową? Nie, a przyczyną tego jest zjawisko Dopplera, które jest ściśle związane z ruchem



$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{mv_x^2}{2kT}\right]$$



Rys. 1

atomów w gazie. Niech promieniowanie laserowe rozchodzi się w kierunku, który nazwiemy osią  $x$ . Rozkład  $v_x$  (składowej prędkości atomów w wyróżnionym w ten sposób kierunku) jest opisany funkcją Maxwella, pokazaną na rysunku 1. Takie same rozkłady występują w dwóch pozostałych prostopadłych kierunkach w przestrzeni. Funkcja rozkładu  $f(v_x)$  jest symetryczna względem punktu  $v_x = 0$ . Jak widać na rysunku 1, dla niższej temperatury rozkład jest węższy. Liczba atomów o prędkości  $v_x$  leżącej w przedziale  $(v_x, v_x + dv_x)$  wynosi  $dn(v_x) = N \cdot f(v_x) \cdot dv_x$ , gdzie  $N$  jest liczbą wszystkich atomów. Grupa atomów o prędkości  $v_x$ , oświetlanych wzdłuż osi  $x$ , ma częstość rezonansową wynoszącą

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v_x}{c}\right),$$

gdzie  $c$  oznacza prędkość rozchodzenia się światła w próżni. Zatem dla zespołu atomów znajdujących się w określonym obszarze, np. wewnątrz zamkniętego naczynia, rozkład częstości rezonansowych jest identyczny z przedstawionym na rysunku 1 rozkładem Maxwella; jest to tak zwane dopplerowskie poszerzenie linii widmowej. Zjawisko to występuje zarówno przy absorpcji promieniowania przez zbiór atomów, jak i wtedy, gdy te atomy emitują promieniowanie. Środkowi linii odpowiada częstość  $\nu_0$ . Jest to częstość rezonansowa atomów, których składowa prędkości  $v_x = 0$ . Jeżeli rozkład widmowy promieniowania laserowego w całości lub częściowo pokrywa się z profilem dopplerowskim linii absorpcyjnej, wynikającym z maxwellowskiego rozkładu prędkości atomów w gazie, wówczas dzięki zjawisku rozpraszania rezonansowego atomy te stają się widoczne.

W roku 1975 po raz pierwszy zaproponowano metodę spowalniania atomów wskutek ciśnienia wywieranego przez spontanicznie rozpraszane promieniowanie rezonansowe. Rozpraszanie rezonansowe składa się z absorpcji i spontanicznej reemisji fotonu (fluorescencji). Foton ma pęd równy  $\hbar k$ , gdzie  $\hbar = h/2\pi$ ,  $h$  oznacza stałą Plancka,  $k$  jest wektorem falowym o wartości  $|k| = 2\pi/\lambda$ , a  $\lambda$  jest długością fali promieniowania. Zgodnie z zasadą zachowania pędu każdorazowa absorpcja fotonu powoduje odrzut atomu. Średni pęd przekazany atomowi po wielu aktach reemisji wynosi zero, ponieważ kierunek każdego spontanicznie wyemitowanego fotonu jest całkowicie przypadkowy. Jeżeli zatem atomy poruszają się w przeciwną stronę niż fotony, to odrzut zmniejsza ich prędkość i atomy oziębiają się. Oziębienia doznają więc tylko te atomy, które mają prędkość  $v_x < 0$  i tylko wtedy, gdy zachodzi rozpraszanie rezonansowe. Wniosek stąd jest następujący. Zastosowane do oziębiania atomów promieniowanie laserowe musi mieć rozkład widmowy znacznie węższy od dopplerowskiej szerokości linii absorpcyjnej i częstość dostrojona do wartości  $\nu < \nu_0$ . Taką możliwość stworzyły lasery barwnikowe, które pojawiły się dopiero na początku lat siedemdziesiątych.

Można oszacować, że pęd fotonu promieniowania leżącego w obszarze widzialnym wynosi  $10^{-22} \text{ g} \cdot \text{cm/s}$ , podczas gdy pęd lekkiego atomu (np. atomu sodu) w gazie o temperaturze  $T = 300 \text{ K}$  jest rzędu  $10^{-18} \text{ g} \cdot \text{cm/s}$ . W takim przypadku dopiero po 10000 rozpraszach fotonu na atomie można obniżyć temperaturę gazu do  $10^{-3} \text{ K}$ . Oczywiście gaz musi być oświetlany wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych osi i ponadto, np. wskutek odbicia, promieniowanie powinno rozchodzić się zarówno w dodatnim, jak i w ujemnym kierunku każdej z osi.

Znacznie łatwiej realizuje się chłodzenie, gdy mamy do czynienia z cząstkami już zlokalizowanymi, np. z jonami zmagazynowanymi w pułapce elektromagnetycznej. Jon uwięziony w pułapce porusza się np. wzdłuż osi  $x$  ruchem harmonicznym z prędkością  $v_x = v_0 \cos 2\pi\nu_{osc} t$ , gdzie  $\nu_{osc}$  oznacza częstość jego oscylacji. Rozkład częstości rezonansowych (częstości promieniowania, dla których jon w przypadku aktu absorpcji może ulec wzbudzeniu) dla oscylujących jonów nie jest ciągły, lecz składa się z szeregu pasm (zob. rysunek 2). Zmagazynowane w pułapce jony oświetlamy promieniowaniem laserowym o częstości  $\nu_L$  dostrojonej do częstości jednego z pasm bocznych,  $\nu_L = \nu_0 - l\nu_{osc}$ , gdzie  $l$  jest liczbą całkowitą. Jony, które pochłoną fotony, zostaną wzbudzone i będą następnie emitowały promieniowanie o średniej energii  $h\nu_0$ , czyli o takim widmie, jak pokazane na rysunku 2. Niedobór energii równy  $lh\nu_{osc}$ , powstający w każdym akcie rozpraszania, pokrywany jest kosztem energii oscylacji jonów i w konsekwencji zmniejsza się amplituda drgań. Stosując promieniowanie laserowe o natężeniu  $I_L = 10 \text{ mW/cm}^2$  można spodziewać się, że „ochłodzenie” jonu o masie porównywalnej z masą atomu sodu do temperatury  $T = 300 \text{ K}$  do temperatury  $T = 10^{-3} \text{ K}$  nastąpi w czasie rzędu 1ms.

W doświadczeniu wykonanym w Heidelbergu w roku 1978 zaobserwowano kilkanaście jonów  $\text{Ba}^+$  wytworzonych, zmagazynowanych i utrzymywanych przez szereg godzin w miniaturowej pułapce elektromagnetycznej (wewnętrzna średnica pułapki miała około 0,7 mm). Jony, na których następowo rozpraszanie rezonansowe światła, były widoczne w postaci chmury o średnicy około 0,05 mm. Rozmiary chmury świadczą zarówno o liczbie jonów, jak i o amplitudzie ich oscylacji, która z kolei zależy od temperatury jonów.

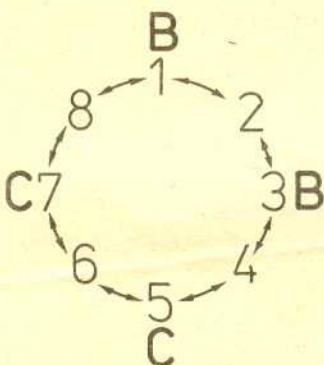
W tym samym laboratorium rok później udało się zaobserwować pojedynczy jon. Do pułapki odpompowanej początkowo do ciśnienia rzędu  $10^{-10} \text{ Torr}$  ( $1 \text{ Pa} = 0,0075 \text{ Torr}$ ) jednocześnie



Rozwiązanie zadania M 400. Ponumerujemy zewnętrzne pola szachownicy tak, jak na rysunku 1. Skoczek może poruszać się po szachownicy zgodnie z grafem z rysunku 2.

1	6	3
4		8
7	2	5

Rys. 1

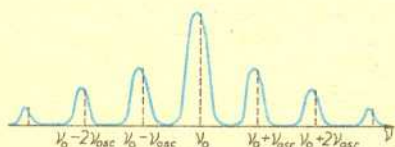


Rys. 2

Zauważmy, że dla dokonania zamiany miejsc skoczków czarnych i białych każdy skoczek musi zmienić miejsce „po przekątnej”.

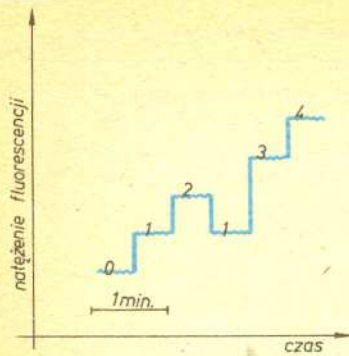
W przeciwnym przypadku skoczek następnym na powyższym grafie (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) w konfiguracji wyjściowej miałby inny kolor, niż skoczek następnym w ustawieniu końcowym, a wykonanie dowolnego ruchu nie zmienia kolejności ustawienia skoczków w tym grafie. Dla zmiany miejsca „po przekątnej” potrzeba co najmniej 4 ruchów, a więc w sumie należy wykonać co najmniej  $4 \cdot 4 = 16$  ruchów.

Przykładowa zamiana pozycji w 16 ruchach: 1—2, 3—4, 5—6, 7—8, 2—3, 4—5, 6—7, 8—1, 3—4, 5—6, 7—8, 1—2, 4—5, 6—7, 8—1, 2—3.



Rys. 2





Rys. 3

wprowadzano atomy Ba i elektrony o odpowiedniej energii, które zderzając się z atomami Ba jonizowały je. W ten sposób wytwarzano jeden lub dwa jony na minutę, które następnie chłodzono za pomocą promieniowania. Natężenie fluorescencji mierzone jako funkcja czasu wyraźnie wykazuje stopnie świadczące o zwiększeniu liczby jonów w pułapce lub o ich ucieczce (rysunek 3). Ostatecznie, pojedynczy jon był widoczny w postaci chmury o średnicy około  $2 \mu\text{m}$ . Odpowiada to temperaturze  $0,01 \text{ K}$ . Chmurę jonową można było obejrzeć dzięki użyciu mikroskopu o maksymalnym powiększeniu 200 razy oraz elektronicznego wzmacniacza obrazu. Wykonano szereg fotografii między innymi na kliszy Kodak 103 a-F, dla której stosowano czas ekspozycji równy 10 minut.

Naukowcy, którzy przeprowadzili opisane tu doświadczenia, twierdzą, że poprawiając w granicach możliwości parametry pułapki i lasera stosowanego do chłodzenia można osiągnąć minimalną temperaturę  $2 \cdot 10^{-5} \text{ K}$ .

Na zakończenie warto nadmienić, że przeprowadzono także pierwsze udane doświadczenia wykorzystujące ciśnienie wywierane przez fotony do zlokalizowania obojętnych elektrycznie atomów. Rolę pułapki odegrała stojąca fala elektromagnetyczna. Warto też zwrócić uwagę na to, że ciśnienie wywierane przez promieniowanie może być równie dobrze wykorzystane do grzania atomów. Jednakże właśnie zlokalizowanie pojedynczego jonu czy atomu i obserwacja jego oddziaływania z promieniowaniem daje fizykom nowe, ogromne możliwości poznania praw rządzących przyrodą.

## Ciągi rekurencyjne a szeregi potęgowe

Dr Jerzy RYLL

W artykule „Rzuć monetę raz jeszcze, czyli prawo arcusa sinusa” (*Delta* 10/1984) pojawił się ciąg  $p_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  spełniający zależność rekurencyjną

$$(1) \quad p_n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k p_{n-1-k}; \quad p_0 = 1.$$

W dowodzie powyższego faktu istotne było przedstawienie  $p_n$  jako liczby elementów konkretnego zbioru i rozważania kombinatoryczne dały nam zarówno zależność rekurencyjną, jak też jawne wyrażenie na  $p_n$ .

Jak znaleźć jawny wzór na wyrazy ciągu zadanego rekurencyjnie? Zadanie takie jest na ogół dosyć trudne. Z ciągiem  $(p_n)$  nie poradzili sobie na przykład uczestnicy obozu przygotowawczego przed Międzynarodową Olimpiadą Matematyczną.

Spróbujmy znaleźć jawny wzór na wyrazy ciągu Fibonacciego, tzn. ciągu spełniającego zależność rekurencyjną

$$(2) \quad \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n; \quad \varphi_0 = \varphi_1 = 1.$$

Określmy funkcję  $F$  jako sumę szeregu potęgowego o o współczynnikach  $\varphi_n$

$$(3) \quad F(t) = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n t^n.$$

Znajdziemy teraz jawny wzór na funkcję  $F$

$$\begin{aligned} F(t) - t - 1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+2} t^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n + \varphi_{n+1}) t^{n+2} = \\ &= t^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n t^n + t \left( \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+1} t^{n+1} \right) = t^2 \cdot F(t) + t(F(t) - 1). \end{aligned}$$

Tak więc funkcja  $F$  spełnia równanie

$$F(t) - t - 1 = t^2 F(t) + t(F(t) - 1).$$

Jedyną taką funkcją jest (jak łatwo obliczyć)

$$F(t) = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

Jak znaleźć współczynniki rozwinięcia funkcji  $F$ ? Zapiszmy ją trochę inaczej. Pierwiastkami trójmianu  $t^2 + t - 1$  są liczby

$$t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \quad \text{Tak więc}$$

$$F(t) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{t_2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{t_2}} - \frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{t_1}} \right).$$

Wystarczy teraz skorzystać ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego i

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{t_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_2} \right)^n - \frac{1}{t_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{t}{t_1} \right)^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( \frac{t_1^{n+1} - t_2^{n+1}}{\sqrt{5} t_1^{n+1} \cdot t_2^{n+1}} \right), \end{aligned}$$

przy czym wzór ten ma sens dla  $|t| < \min(|t_1|, |t_2|)$ .

Z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy mamy

$$\varphi_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \cdot \sqrt{5}}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Funkcja może mieć tylko jedno rozwinięcie w szereg potęgowy (w otoczeniu 0),

$$\text{tzn. jeśli } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \text{ to } a_n = b_n.$$

Ze zrozumiałych powodów funkcja  $F$  nazywa się funkcją tworzącą ciągu  $(\varphi_n)$ .

Oto nieco inny problem, który też można rozwiązać za pomocą funkcji tworzących. Jak szybko dąży do  $\infty$  ciąg  $a_n = \sum_{j=0}^n \binom{n+j}{2j}$ ?