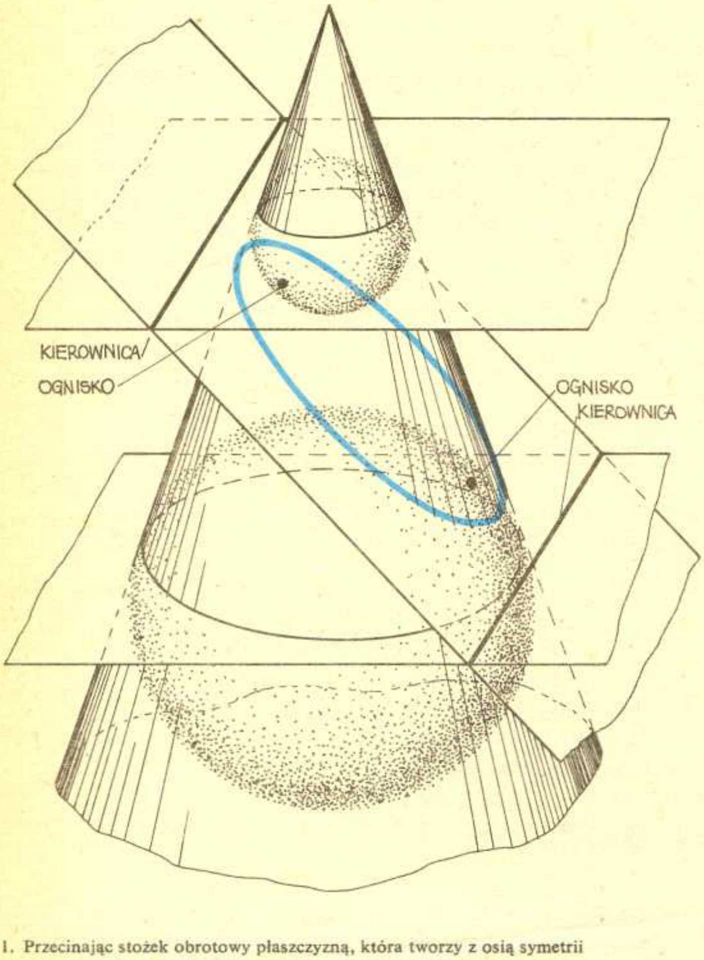
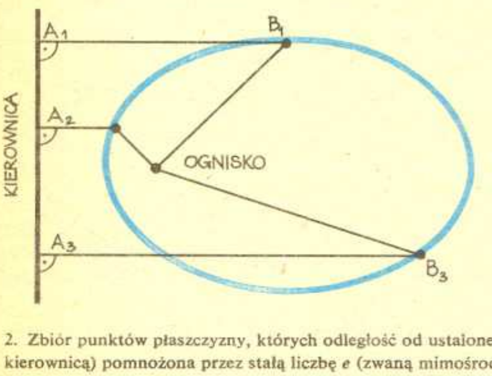
Co to jest elipsa?

Na takie pytanie każdy matematyk z łatwością odpowie. Odpowiedzi mogą się jednak znacznie różnić. Mogą nawet być „w różnych językach", to znaczy określać elipsę za pomocą różnych pojęć, pochodzących czasami z zupełnie różnych gałęzi matematyki. To, że każde z tych określeń definiuje elipsę, każe matematykom traktować ją jako obiektywnie istniejącą rzecz. Twierdzić, że elipsa obiektywnie istnieje, a może być opisywana różnymi sposobami, tak jak w różny sposób możemy opisywać zjawisko fizyczne. Filozofowie zaś mówią wtedy, że matematycy są wyznawcami filozofii Platona. Platon bowiem za przedmiot matematyki (i nie tylko matematyki) uważał obiekty idealne (istniejące jedynie w świecie ducha), które siłą intelektu poznajemy w ten sam sposób, jak obiekty materialne poznajemy zmysłami.

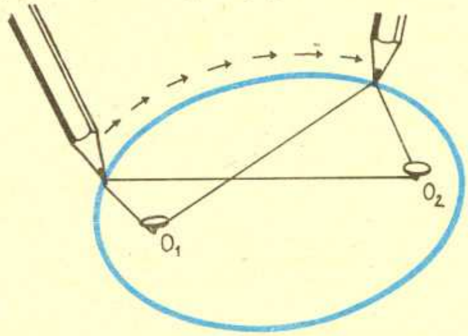
Oto dwanaście różnych określeń elipsy. Redakcji znane są jeszcze inne definicje elipsy, dlatego możemy z czystym sumieniem zaproponować Czytelnikom, by ich poszukali.



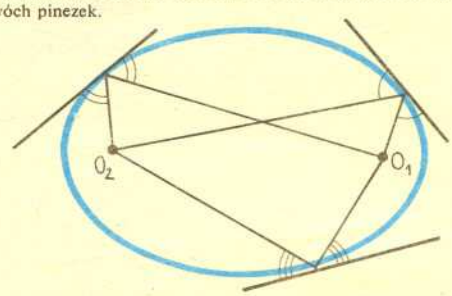
1. Przecinając stożek obrotowy płaszczyzną, która tworzy z osią symetrii stożka kąt większy od kąta między osią a tworzącymi stożka, otrzymamy elipsę. Jeżeli wpiszemy w stożek kule styczne do przecinającej go płaszczyzny (są dwie takie kule — ich powierzchnie nazywa się sferami Dandelina), to ich punkty styczności z płaszczyzną nazywa się ogniskami elipsy. Przecięcia płaszczyzny przecinającej stożek z płaszczyznami zawierającymi okręgi, wzdłuż których kule są styczne do stożka, są dwiema prostymi równoległymi, które nazywa się kierownicami elipsy.



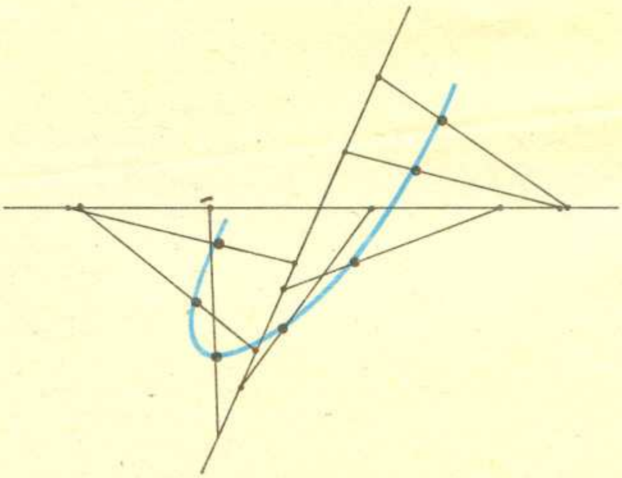
2. Zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonej prostej (zwanej kierownicą) pomnożona przez stałą liczbę e (zwaną mimośrodem) jest równa ich odległości od ustalonego punktu (zwanego ogniskiem), jest elipsą, o ile tylko $0 < e < 1$. Mimośród jest przez elipsę wyznaczony jednoznacznie, natomiast każda elipsa ma dwie pary kierownica — ognisko. W tym określeniu nie mieszczą się okręgi.



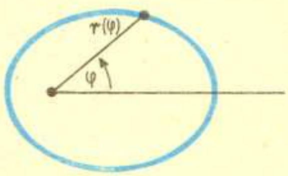
3. Zbiór punktów płaszczyzny, których suma odległości od dwóch ustalonych punktów (ognisk) jest stała, jest elipsą. Pozwala to rysować elipsy za pomocą nitki i dwóch pinezek.



4. Krzywa płaska mająca tę własność, że promienie świetlne wysłane w dowolnym kierunku z pewnego ustalonego punktu (ogniska) po odbiciu od krzywej skupią się wszystkie w jednym punkcie (drugie ognisko), jest elipsą.



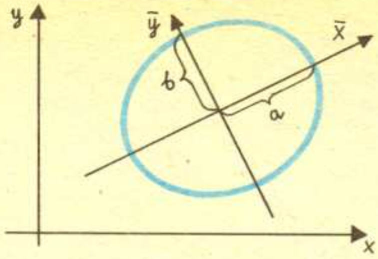
5. Odcinek o stałej długości ślizga się końcami po dwóch przecinających się prostych. Dowolnie ustalony punkt tego odcinka zakreśli podczas ślizgania elipsę.



6. Zakreślając wokół ustalonego punktu (ogniska) krzywą zmiennym promieniem

$$r(\varphi) = \frac{k}{1 + e\cos\varphi},$$

gdzie $k > 0$ i $0 \leqslant e < 1$, otrzymamy elipsę.



7. Równanie $x^2+pxy+qy^2+rx+sy+t=0$ określa w kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie elipsę, o ile tylko

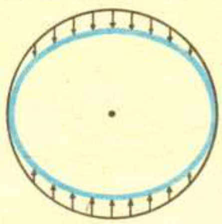
$$\begin{vmatrix} t & \frac{1}{2}r & \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}r & 1 & \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2}s & \frac{1}{2}p & q \end{vmatrix} = tq+\frac{1}{4}prs-\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{4}p^2t-\frac{1}{4}r^2q < 0$$

i
$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2}p & q \end{vmatrix} = q-\frac{1}{4}p^2 > 0.$$

Warunki te są równoważne możliwości dokonania takiej zmiany układu współrzędnych, by równanie było postaci

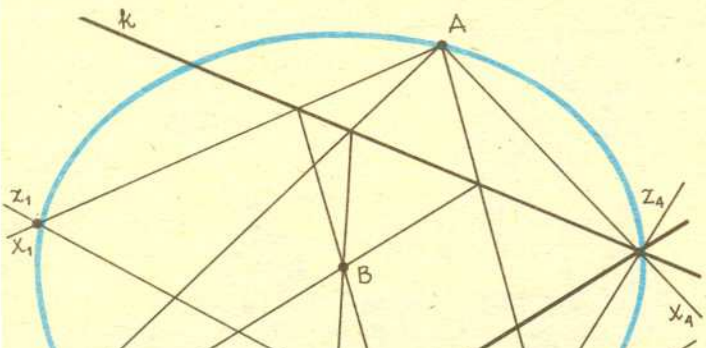
$$\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}-1=0,$$

w którym a i b mają już sens geometryczny — są to połowy długości osi elipsy.

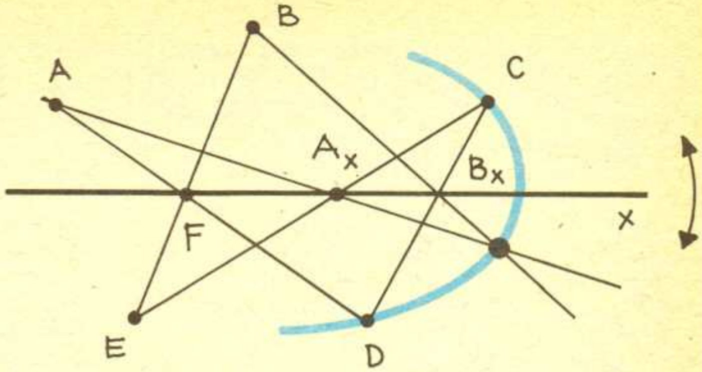


8. Przekształcenie afiniczne płaszczyzny to takie, które proste przeprowadza na proste. Są wśród przekształceń afinicznych izometrie i podobieństwa. Stosując inne od wymienionych przekształcenie afiniczne do okręgu otrzymamy elipsę (różną od okręgu).

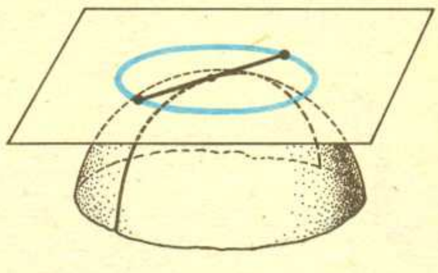
Najprostszym przykładem takiego przekształcenia jest powinowactwo prostokątne zmieniające odległość punktów od ustalonej prostej w stałym stosunku. Oczywiście bez ograniczenia przekształceń afinicznych otrzymujemy również okręgi.



9. Weźmy na płaszczyźnie dwie proste k i l oraz trzy nie leżące na nich punkty A, B, C. Dowolnej prostej x przechodzącej przez A przyporządkowujemy prostą y przechodzącą przez B i przecinającą się z x na k. Z kolei prostej y przyporządkowujemy prostą z przechodzącą przez C i przecinającą się z y na l. Zbiór punktów przecięcia każdej z prostych x z odpowiadającą jej prostą z jest elipsą, o ile tylko proste k i l przecinają się po przeciwnej stronie odcinka AC niż punkt B, k przecina odcinek AB, a l — odcinek BC.

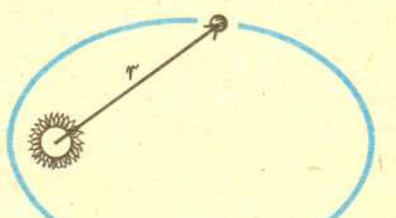


10. Niech A, B, C, D, E będą kolejnymi wierzchołkami dowolnego pięciokąta wypukłego o przekątnych dłuższych od boków i niech F będzie punktem przecięcia AD i BE. Dla dowolnej prostej x przechodzącej przez F oznaczmy przez A_x jej przecięcie z CE i przez B_x — przecięcie z CD. Zbiór punktów przecięcia prostych AA_x i BB_x dla różnych prostych x jest elipsą (przechodzącą przez A, B, C, D i E).



11. Weźmy na dowolnej gładkiej powierzchni „szczyt", czyli taki punkt, z którego wszystkie drogi prowadzą na dół. Jeśli przetniemy powierzchnię przez „szczyt" płaszczyznami pionowymi, otrzymamy pewne krzywe (zwane normalnymi). Odkładając na stycznej do każdej krzywej (w obie strony od „szczytu") odcinek długości równej pierwiastkowi z promienia jej krzywizny otrzymamy elipsę (zwaną indykatrysą Dupina „szczytu").

Promień krzywizny krzywej w punkcie to promień okręgu najlepiej przybliżającego tę krzywą w tym punkcie.



12. Wśród rozwiązań równania różniczkowego

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -a(r)r$$

są elipsy. Wiemy to na pewno, bo równanie tego typu opisuje zagadnienie dwóch ciał, a więc np. ruch Ziemi wokół Słońca. Aby stwierdzić dla jakiego $a(r)$ i dla jakich warunków początkowych otrzymamy elipsę, odwołajmy się do fizyki. Ruch drobnego ciała względem środka dużego ciała o masie M opisany jest równaniem

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M}{r^3}r,$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Elipsę otrzymamy, gdy energia układu będzie ujemna, co odpowiada warunkowi, by prędkość v_0 (w chwili $t=0$) i położenie r_0 spełniały warunek

$$\frac{v_0^2}{2}-G\frac{M}{r_0}<0.$$