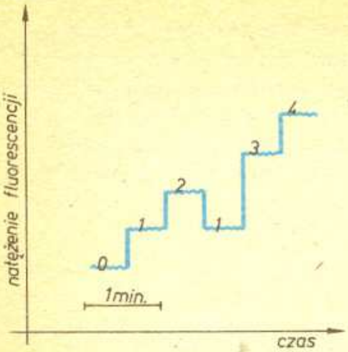


Rys. 3

wprowadzano atomy Ba i elektrony o odpowiedniej energii, które zderzając się z atomami Ba jonizowały je. W ten sposób wytwarzano jeden lub dwa jony na minutę, które następnie chłodzono za pomocą promieniowania. Natężenie fluorescencji mierzone jako funkcja czasu wyraźnie wykazuje stopnie świadczące o zwiększeniu liczby jonów w pułapce lub o ich ucieczce (rysunek 3). Ostatecznie, pojedyńczy jon był widoczny w postaci chmury o średnicy około 2 μm. Odpowiada to temperaturze 0,01 K. Chmurę jonową można było obejrzeć dzięki użyciu mikroskopu o maksymalnym powiększeniu 200 razy oraz elektronicznego wzmacniacza obrazu. Wykonano szereg fotografii między innymi na kliszy Kodak 103 a-F, dla której stosowano czas ekspozycji równy 10 minut.

Naukowcy, którzy przeprowadzili opisane tu doświadczenia, twierdzą, że poprawiając w granicach możliwości parametry pułapki i lasera stosowanego do chłodzenia można osiągnąć minimalną temperaturę $2 \cdot 10^{-5}$ K.

Na zakończenie warto nadmienić, że przeprowadzono także pierwsze udane doświadczenia wykorzystujące ciśnienie wywierane przez fotony do zlokalizowania obojętnych elektrycznie atomów. Rolę pułapki odegrała stojąca fala elektromagnetyczna. Warto też zwrócić uwagę na to, że ciśnienie wywierane przez promieniowanie może być równie dobrze wykorzystane do grzania atomów. Jednakże właśnie zlokalizowanie pojedynczego jonu czy atomu i obserwacja jego oddziaływania z promieniowaniem daje fizykom nowe, ogromne możliwości poznania praw rządzących przyrodą.

Ciągi rekurencyjne a szeregi potęgowe

Dr Jerzy RYLL

W artykule „Rzuć monetę raz jeszcze, czyli prawo arcusa sinusa" (*Delta* 10/1984) pojawił się ciąg $p_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ spełniający zależność rekurencyjną

$$(1) \qquad p_n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k p_{n-1-k}; \qquad p_0 = 1.$$

W dowodzie powyższego faktu istotne było przedstawienie p_n jako liczby elementów konkretnego zbioru i rozważania kombinatoryczne dały nam zarówno zależność rekurencyjną, jak też jawne wyrażenie na p_n.

Jak znaleźć jawny wzór na wyrazy ciągu zadanego rekurencyjnie? Zadanie takie jest na ogół dosyć trudne. Z ciągiem (p_n) nie poradzili sobie na przykład uczestnicy obozu przygotowawczego przed Międzynarodową Olimpiadą Matematyczną.

Spróbujmy znaleźć jawny wzór na wyrazy ciągu Fibonacciego, tzn. ciągu spełniającego zależność rekurencyjną

$$(2) \qquad \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n; \qquad \varphi_0 = \varphi_1 = 1.$$

Określmy funkcję F jako sumę szeregu potęgowego o o współczynnikach φ_n

$$(3) \qquad F(t) = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n t^n.$$

Znajdziemy teraz jawny wzór na funkcję F

$$F(t) - t - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+2} t^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n + \varphi_{n+1}) t^{n+2} =$$

$$= t^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n t^n + t\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+1} t^{n+1}\Big) = t^2 \cdot F(t) + t(F(t) - 1).$$

Tak więc funkcja F spełnia równanie

$$F(t) - t - 1 = t^2 F(t) + t(F(t) - 1).$$

Jedyną taką funkcją jest (jak łatwo obliczyć)

$$F(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}.$$

Jak znaleźć współczynniki rozwinięcia funkcji F? Zapiszmy ją trochę inaczej. Pierwiastkami trójmianu $t^2 + t - 1$ są liczby $t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ i $t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Tak więc

$$F(t) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{t_2}} - \frac{1}{t_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{t_1}}\right).$$

Wystarczy teraz skorzystać ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego i

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_2}\right)^n - \frac{1}{t_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{t_1}\right)^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(\frac{t_1^{n+1} - t_2^{n+1}}{\sqrt{5}\, t_1^{n+1} \cdot t_2^{n+1}}\right),$$

przy czym wzór ten ma sens dla $|t| < \min(|t_1|, |t_2|)$. Z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy mamy

$$\varphi_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \cdot \sqrt{5}}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Funkcja może mieć tylko jedno rozwinięcie w szereg potęgowy (w otoczeniu 0), tzn. jeśli $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, to $a_n = b_n$.

Ze zrozumiałych powodów funkcja F nazywa się funkcją tworzącą ciągu (φ_n).

Oto nieco inny problem, który też można rozwiązać za pomocą funkcji tworzących. Jak szybko dąży do ∞ ciąg $a_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+j}{2j}$?

Wystarczy znaleźć inny jawny wzór na a_n. Rozważmy dodatkowo ciąg $b_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j}{2j+1}$. Można sprawdzić, że

$$a_{n+1} = a_n + b_{n+1}, \qquad a_0 = 1,\ b_0 = 0,$$
$$b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Oznaczmy przez A i B funkcje tworzące ciągów (a_n) i (b_n), to znaczy $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. Z zależności rekurencyjnej łatwo wynika, że funkcje A i B muszą spełniać układ równań

$$A(t) - 1 = t \cdot A(t) + B(t)$$
$$B(t) = t(A(t) + B(t)).$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy

$$A(t) = \frac{1-t}{1-3t+t^2}, \qquad B(t) = \frac{t}{1-3t+t^2}.$$

Podobnie jak poprzednio, znajdując pierwiastki trójmianu $t^2 - 3t + 1$ i korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego stwierdzamy, że

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \cdot t^n,$$

a więc wyrażenia w nawiasach kwadratowych są równe wyrazom ciągu (a_n). Ponieważ $\left| \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$, więc ciąg (a_n) różni się od ciągu geometrycznego $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ o ciąg zbieżny do 0.

Oczywiście przy bardziej skomplikowanych zależnościach rekurencyjnych funkcje tworzące i równania je wyznaczające też się komplikują. Potrzebna jest dodatkowa wiedza o szeregach potęgowych.

Wróćmy do ciągu (p_n) spełniającego zależność (1). Niech P będzie funkcją tworzącą. Mamy

$$P^2(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k p_{n-k} \right) t^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} t^n = P(t) \cdot t - 1.$$

Jeśli funkcje $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ i $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, to $(f \cdot g)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) t^n$. Można to wykazać mnożąc każdy wyraz rozwinięcia f przez każdy wyraz rozwinięcia g i grupując jednomiany tego samego stopnia. W przypadku szeregów potęgowych zbieżnych takie postępowanie jest dozwolone.

Rozwiązując równanie na funkcję P otrzymujemy $P(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{t}$.

I znów trzeba skorzystać z dodatkowej informacji:

$$(4) \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n + \ldots$$

(gdzie symbol $k!!$ oznacza iloczyn liczb niewiększych niż k i tej samej co k parzystości). Wzór powyższy jest prawdziwy dla $|x| < 1$.

Zauważmy, że dla $n \geqslant 2$ mamy

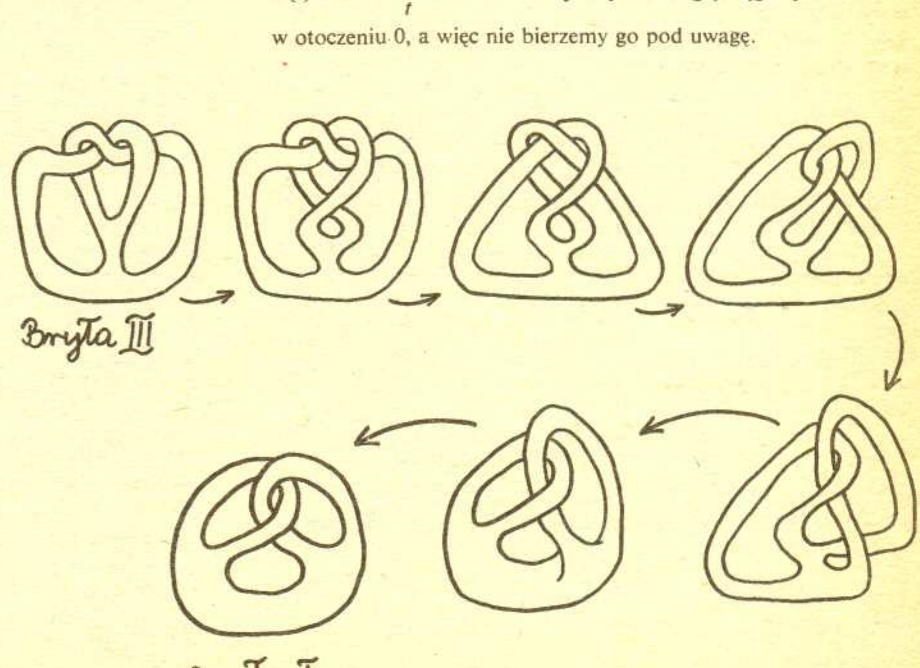
$$\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n-2)!}{(2n-2)!!(2n)!!} = \frac{1}{2n} \frac{(2n-2)!}{[(2n-2)!!]^2} =$$
$$= \frac{1}{2n} \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1}(n-1)!]^2} = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \cdot 2^{-2n+1}.$$

Wstawiając $x = -4t$ do (4) i uwzględniając umowę $\binom{0}{0} = 1$ otrzymujemy

$$\sqrt{1-4t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{2n-2}{n-1} \cdot 2^{-2n+1} \cdot (-1)^n \cdot 4^n \cdot t^n =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n} \binom{2n-2}{n-1} t^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} t^{n+1}.$$

Tak więc $P(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n$.

$\left(\text{Wzór zachodzi dla } |t| < \frac{1}{4} \right)$. Tak więc otrzymaliśmy znany nam jawny wzór na ciąg (p_n). Zauważmy, że drugie rozwiązanie $P(t) = \frac{1+\sqrt{1-4t}}{t}$ nie rozwija się w szereg potęgowy w otoczeniu 0, a więc nie bierzemy go pod uwagę.



BRYŁY

Na konkurs "Małej Delty" nadesłano 34 dobre rozwiązania. Spośród nich wybraliśmy pracę

Marii Boryczki z Radomia

i ją właśnie reprodukujemy. Spośród wszystkich autorów dobrych prac nagrody książkowe wylosowały

Anna Stolarczyk ze Szczecina,
Alicja Futrega z Morąga,
Katarzyna Tempczyk z Warszawy.