

5 mała delta

Wystarczą cztery barwy

W 1976 roku świat obiegła wieść: problem czterech barw został rozwiązany. Poczta Stanów Zjednoczonych używała z tej okazji specjalnego datownika z napisem „Wystarczą cztery barwy”. Sam problem daje się sformułować bardzo łatwo: jaka najmniejsza liczba kolorów jest potrzebna, aby można było pomalować każdą mapę. Pomalować tak, by sąsiednie kraje były zawsze różnych kolorów. Pytanie to postawiono w połowie XIX w. wraz z hipotezą, że zawsze wystarczą cztery kolory.

Potrzebne są tu pewne założenia o mapach. Za sąsiednie uważamy dwa państwa, które stykają się wzdłuż linii. Każde państwo musi się składać z jednego kawałka. Jeśli chociaż jeden z powyższych warunków nie jest spełniony, to do pomalowania mapy mogą być potrzebne więcej niż 4 kolory (rys. 1 i 2).

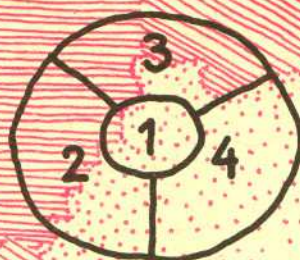
Do pomalowania mapy z rysunku 3 potrzeba 4 kolorów — każde z czterech państw jest sąsiadem każdego innego. Udowodniono, że nie można narysować mapy, na której każde z pięciu państw jest sąsiadem każdego innego. Przemawiało to za prawdziwością hipotezy. Ale mapa z rysunku 4 wymaga 4 kolorów, mimo że nie ma na nich czwórki państw, z których każde jest sąsiadem trzech pozostałych.



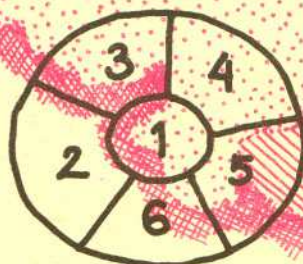
Rys. 1. Jeśli za sąsiednie uważalibyśmy państwa stykające się w jednym punkcie, to do pomalowania tej mapy potrzeba 8 kolorów.



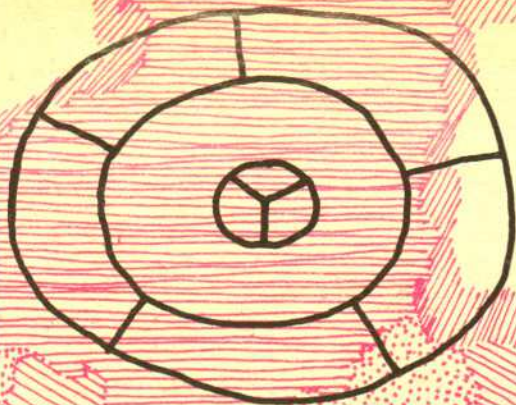
Rys. 2. Jeśli dopuścimy państwa składające się z kilku kawałków, to każde z n państw byłoby sąsiadem każdego innego (tu $n = 7$), a więc potrzebnych byłoby n kolorów.



Rys. 3. Każde z czterech państw na tej mapie jest sąsiadem każdego innego.



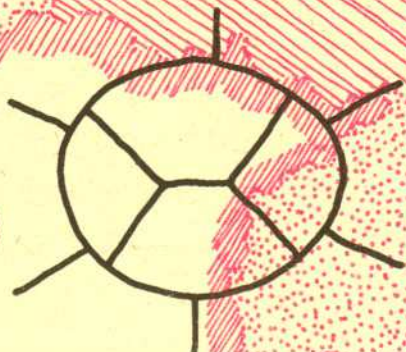
Rys. 4. Do pomalowania każdej czwórki państw z tej mapy wystarczą 3 kolory, ale dla całej mapy potrzeba czterech.



Rys. 5. Te mapy nie są normalne.



Rys. 6. Jeden z powyższych fragmentów musi wystąpić na mapie normalnej.



Rys. 7. Fragment, który nie może wystąpić na mapie minimalnej. Używając tego typu wyników pokazano na początku wieku, że mapa minimalna ma więcej niż 22 państwa. Do roku 1950 zwiększono tę liczbę do 36 państw.

W 1879 roku A. B. Kempe podał błędny dowód hipotezy, za to zawierający idee, dzięki którym w prawie sto lat później rozstrzygnięto zagadnienie 4 barw ostatecznie. Kempe zauważył, że zamiast wszystkich map można rozpatrywać tylko mapy, na których żadne państwo nie otacza innych i gdzie w jednym punkcie spotykają się co najwyżej trzy państwa — takie mapy nazywamy normalnymi. Otóż, dla każdej mapy można znaleźć mapę normalną wymagającą tyluż kolorów.

Kempe pokazał też, że na mapie normalnej musi być państwo o mniej niż 6 sąsiadach — a więc musi się na takiej mapie znaleźć jeden z fragmentów z rysunku 6. (Korzystając z tego dość łatwo pokazać, że 5 kolorów wystarczy do pomalowania każdej mapy.) Kempe wybierał spośród map, dla których potrzeba 5 kolorów, mapę minimalną — o najmniejszej liczbie państw. Dowodził następnie, że na mapie minimalnej nie może być państw o 2, 3, 4 lub 5 (tu był błąd) sąsiadach.

Ten schemat dowodu — podanie zbioru fragmentów, z których któryś musi znaleźć się na mapie normalnej i udowodnienie, że na mapie minimalnej nie może być żadnego z tych fragmentów — został użyty do rozwiązania problemu. Ale zbiór podany przez K. Appela, W. Hakena i ... komputer miał nie cztery, jak tego chciał Kempe, lecz 1936 fragmentów i właśnie tylko komputer mógł wykonać potrzebne obliczenia. Człowiekowi nie starczyłoby na to życia.

Oczywiście jest możliwe, że zostanie wymyślony tradycyjny, tzn. bez użycia komputera, dowód twierdzenia o 4 barwach oparty na innej idei, ale dotychczasowy jest przykładem dowodu niesprawdzalnego bezpośrednio przez człowieka i wywołał filozoficzne dyskusje na temat jego akceptowalności.

Małą Deltę przygotował Jerzy RYLL.