

Rozwiązanie zadania F 170. Podczas gdy środek ciężkości kuli podnosi się, środek ciężkości cieczy się obniża. Zmiana energii potencjalnej układu kula-ciecz po przejściu przez kulę drogi s jest równa $Mgs - mgs$, gdzie m masa kuli, a M masa wypartej przez kulę cieczy.

Z zasady zachowania energii

$$Mgs - mgs = T_1 + T_2,$$

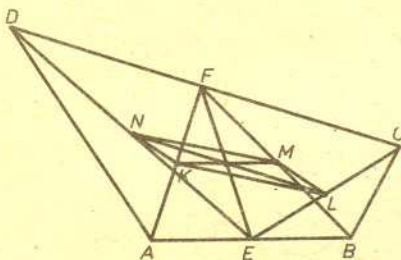
gdzie T_1 — energia kinetyczna uzyskana przez kulę, a T_2 — energia kinetyczna uzyskana przez ciecz.

Jeśli kula porusza się z przyspieszeniem a , to

$$T_1 = mas \text{ i } a = \frac{Mg - mg}{m} = \frac{T_2}{ms},$$

a więc a nie jest stałe. Wynika stąd, że siła działająca na wypływającą kulę ze strony nielepkiej cieczy jest mniejsza od siły wyporu.

Rozwiązanie zadania M 397. Oznaczmy środki odcinków AF , CE , BF , DE odpowiednio przez K , L , M , N . EF jest środkową trójkątów ELN i FKM i przecina się z każdym z odcinków KM i LN w jednym punkcie — środku EF . Stąd wynika teza (odcinki KM i LN mają wspólny środek).



Rozwiązanie zadania M 395. Dla $n = 0$ teza zadania jest oczywista. Przypuśćmy teraz, że spośród dowolnych $2^{n+1} - 1$ liczb całkowitych można wybrać 2^n liczb o sumie podzielnej przez 2^n . Rozważmy pewien zbiór $2^{n+2} - 1$ liczb i wybierzmy spośród nich 2^n liczb o sumie podzielnej przez 2^n , spośród pozostałych liczb znów wybierzmy 2^n liczb o tej samej własności; z pozostałych $2^{n+1} - 1$ liczb możemy dokonać wyboru trzeciego zbioru 2^n liczb o sumie podzielnej przez 2^n . Weźmy teraz dwa spośród tych zbiorów, dla których sumy elementów dają te same reszty przy dzieleniu przez 2^{n+1} (możliwe są tylko dwie reszty: 0 i 2^n). Suma 2^{n+1} liczb z tych dwóch zbiorów jest podzielna przez 2^{n+1} , co kończy krok indukcyjny. $2^{n+1} - 2$ elementowym zbiorem, dla którego nie istnieje żądany wybór, jest zbiór złożony z $2^n - 1$ liczb podzielnych przez 2^n i $2^n - 1$ liczb dających resztę 1 przy dzieleniu przez 2^n , np. $2^n - 1$ zer i tyleż jedynek.

Burzliwy rozwój kosmologii rozpoczął się na początku XX wieku, po ogłoszeniu przez Einsteina (w 1916 roku) ogólnej teorii względności. Wkrótce potem znaleziono pierwsze kosmologiczne rozwiązania podanych przez niego równań pola. Prawie w tym samym czasie odkryto galaktyki i stwierdzono, że oddalają się od nas tym szybciej, im dalej się znajdują (prawo Hubble'a). Duża ilość danych obserwacyjnych i prac teoretycznych spowodowała, że w okresie powojennym kosmologia nie tylko stała się nauką w pełnym tego słowa znaczeniu, ale jest jedną z najszybciej rozwijających się.

Pierwsze 20 lat po wojnie to okres, w którym trwały spory o to, czy Wszechświat podlega ewolucji w czasie, czy też jego obserwowane cechy są niezienne. Najprostsze, jednorodne i izotropowe modele kosmologiczne przewidują, że początkowo materia wypełniająca Wszechświat była w stanie osobliwym — o nieskończonej gęstości i temperaturze — a następnie, w miarę rozszerzania stygła i rozrzedzała się. W 1948 roku Alpher, Bethe i Gamow przyjmując model gorącego Wszechświata przewidzieli istnienie relikowego promieniowania tła, o widmie charakterystycznym dla ciała doskonale czarnego. Model gorącego Wielkiego Wybuchu nie został przyjęty od razu. Przewidywany na jego podstawie wiek Wszechświata byłby zbyt krótki w porównaniu z wiekiem izotopów w skorupie Ziemi i meteoritach. Również fakt ewolucji i początkowy stan osobliwy budziły zastrzeżenia. Próbuąc rozszerzyć Zasadę Kosmologiczną (mówiącą, że obserwowane cechy Wszechświata nie zależą od położenia obserwatora) do postaci Doskonałej Zasady Kosmologicznej (mówiącej, że cechy te nie zależą również od czasu) Bondi, Gold i Hoyle w 1948 roku zaproponowali model stanu stacjonarnego, w którym parametry Wszechświata (np. średnia gęstość materii) były niezienne, a efekt ekspansji równoważyła ciągła kreacja materii, w tempie jednej cząstki o masie protonu w jednym litrze objętości na miliard lat.

W 1952 r. Baade odkrył, że istnieją dwa typy cefeid o różnych zależnościach okresu od jasności. Doprowadziło to do 2,6-krotnego zwiększenia wyznaczonych odległości do galaktyk i zwiększenia przewidywanego wieku Wszechświata. Problem wieku Wszechświata został całkowicie rozwiązany, gdy w 1958 r. Sandage odkrył, że obiekty uznane przez Hubble'a za galaktyki są obszarami HII — skupiskami gwiazd, otoczonych przez plazmę, leżącymi w naszej Galaktyce. Odkrycie to spowodowało dalsze 2,2-krotne zwiększenie skali odległości i wieku Wszechświata.

Odkrycie przez Penziasa i Wilsona w 1965 r. mikrofalowego promieniowania tła było punktem zwrotnym w rozwoju kosmologii. Zapoczątkowało drugie powojenne dwudziestolecie, w którym kolejne odkrycia obserwatorów i prace teoretyków doprowadziły do niemal powszechnego przyjęcia teorii gorącego Wielkiego Wybuchu. Za swoje odkrycie Penzias i Wilson otrzymali w 1978 r. Nagrodę Nobla. Teoria gorącego Wielkiego Wybuchu oparta jest na trzech faktach obserwacyjnych: ucieczce galaktyk (prawo Hubble'a), składzie chemicznym materii (szczególnie znaczenie mają obfitości deuteru, ^4He , ^7Li), istnieniu i własnościach promieniowania tła. Promieniowanie tła, o temperaturze 3 K, zawiera w sobie informacje o rozkładzie materii w chwili, gdy temperatura plazmy wypełniającej Wszechświat wynosiła około trzech tysięcy kelwinów. W 1966 roku opisano, jak w warunkach kosmologicznych w gorącym Wszechświecie powstają lekkie izotopy.

Obawy, że początkowa osobliwość jest konsekwencją założeń o jednorodności i izotropii przestrzeni osłabły, gdy w 1968 r. Hawking, Ellis i Penrose pokazali, że osobliwości pojawiają się w rozwiązaniach równań Einsteina, nawet bez założenia wysokiej symetrii czasoprzestrzeni.

Ostatnie lata przyniosły nowe dane o rozkładzie materii we Wszechświecie w wielkich skalach. Wiadomo było, że galaktyki skupione są w gromadach o rozmiarach kilku megaparseków. Obecnie trójwymiarowa analiza rozkładu galaktyk i gromad pokazuje, że istnieją jeszcze większe struktury (nazywane supergromadami) o rozmiarach kilkudziesięciu megaparseków. Pomiedzy nimi występują ogromne (o podobnych rozmiarach) niemal zupełnie puste obszary. Nie przeczy to założeniom o jednorodności i izotropii Wszechświata, jako że rozmiary obserwowanej przez nas części Wszechświata wynoszą kilka tysięcy megaparseków. Problem pochodzenia i ewolucji obserwowanej wielkoskalowej struktury jest do dzisiaj nie rozwiązany.

Od kilku lat bardzo intensywnie rozwija się współpraca fizyków cząstek elementarnych z kosmologami. Warunki panujące we wczesnych etapach ewolucji Wszechświata dostarczają często jedynych możliwości sprawdzania najnowszych teorii cząstek elementarnych czy teorii unifikujących oddziaływania. Intrygujący problem: dlaczego gwiazdy i galaktyki zbudowane są z materii, a antymaterię spotykamy tylko w warunkach laboratoryjnych — został rozwiązany w ramach teorii unifikującej oddziaływania słabe i elektromagnetyczne.