

## Zadania z fizyki nr 7, 8

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

7. Jednorodną, cienką obręcz o masie  $m$  i promieniu  $r$  wprowadzono w ruch ślizgowy po poziomym, płaskim podłożu z początkową prędkością środka masy  $v_0$ , nadając jej jednocześnie prędkość kątową  $\omega_0$  wirowania w płaszczyźnie pionowej tak, jak to przedstawia rysunek. Jakie warunki muszą być spełnione, aby obręcz wróciła do punktu startowego? Zakładamy, że podłoże jest jednorodne.

8. Podczas słonecznego poranka, gdy trawa pokryta jest jeszcze rosą, można zaobserwować ciekawe zjawisko: spoglądając na swój cień na trawie widzi się aureolę wokół głowy, podczas gdy reszta własnego cienia jest jej pozbawiona. Wyjaśnić to zjawisko.

## Struktura protonu

W 1911 roku angielski fizyk Ernest Rutherford w doświadczeniu polegającym na bombardowaniu cząstkami  $\alpha$  cienkiej złotej folii wykazał, że ładunek elektryczny wewnątrz atomu nie jest rozłożony równomiernie. Wśród rozpraszonych cząstek  $\alpha$  znajdowały się takie, które odbiły się od atomów złota pod bardzo dużym kątem. Rutherford wyjaśnił ten niezwykle zaskakujący w owych czasach wynik zakładając, iż wewnątrz atomu znajduje się ciężki, dodatni ładunek punktowy — jądro atomowe.

Zaobserwowanie w następnych latach jąder wodoru wybijanych przez cząstki  $\alpha$  z różnych pierwiastków było jednym z dowodów na to, że w jądrach są protony.

Charakter sił wiążących protony w jądrach atomowych pozwala sądzić, że proton ma złożoną budowę. Potężne energie związane z działaniem tych sił powinny bowiem powodować ciągłe samorzutne pojawianie się i znikanie różnych cząstek, a tym samym tworzenie się skomplikowanej struktury.

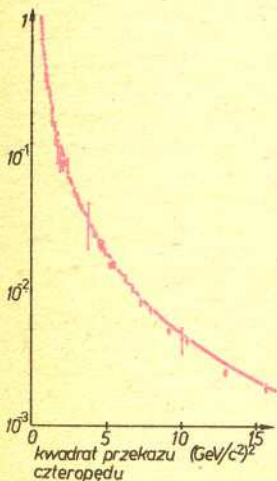
Do badania tej struktury zastosowano, z niewielkimi zmianami, eksperyment Rutherforda. Cząstki  $\alpha$  zastąpiono elektronami, które nie są czule na, nie do końca poznane, siły jądrowe. Ograniczono się tym samym do badania wewnątrzprotonowego rozkładu ładunku elektrycznego. Dodatkowy warunek eksperymentalny narzuca zasada nieoznaczoności, według której im dokładniej chcemy zlokalizować obiekt, tym bardziej zaburzamy jego pęd. Tak więc, im więcej szczegółów struktury protonu chcemy poznać, tym większy pęd musimy mu przekazać. Do tego potrzebne są jednak elektrony o dużych energiach. Dostarczyły ich akceleratory wybudowane w latach sześćdziesiątych.

Początkowo strukturę protonu badano w zderzeniach elastycznych, w których podczas rozpraszania elektronu nie powstawały żadne nowe cząstki. Prawdopodobieństwo takiego procesu bardzo gwałtownie maleje przy wzroście przekazywanego pędu — dużo szybciej niż przy rozpraszaniu na punktowym ładunku (rys. 1). Interpretacja tego faktu jest prosta. Elektron rozproszony pod dużym kątem przekazuje pęd jedynie fragmentowi protonu, co prowadzi zwykle do naruszenia jego konstrukcji. Towarzyszy temu powstanie wielu nowych cząstek.

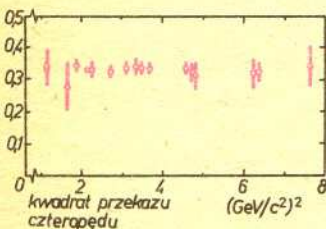
Przy badaniu struktury nie jest właściwie istotne, co dzieje się z protonem (w eksperymencie Rutherforda atom na ogół ulegał jonizacji). Zaczęto więc brać pod uwagę wszystkie przypadki rozpraszania elektronu abstrahując od faktu, iż w większości z nich powstają dodatkowe cząstki. Po tym zabiegu drastycznie zmienił się charakter zależności prawdopodobieństwa oddziaływania od przekazywanego protonowi pędu. Zależność okazała się być identyczna jak dla ładunków punktowych (rys. 2).

Odkrycie to jest w pewnym sensie podobne do odkrycia przez Rutherforda rozpraszania cząstek  $\alpha$  pod dużymi kątami. W obu przypadkach wynik eksperymentu oznacza, że tarcza nie jest jednorodna, a zawiera wewnątrz punktowe ładunki elektryczne. Punktowe cząstki naładowane w protonie nazwano partonami. Istnieje wiele eksperymentalnych dowodów na to, że partony to kwarki wprowadzone wcześniej dla wyjaśnienia pewnych symetrii w świecie cząstek elementarnych. Jak dotąd nie udało się jednak zaobserwować kwarków na zewnątrz protonu i wiele przesłanek teoretycznych przemawia za tym, że nie uda się to nigdy.

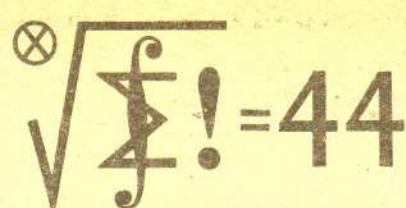
Zmiana stosunku prawdopodobieństwa rozpraszania elektronu na protonie do prawdopodobieństwa rozpraszania na ładunku punktowym w zależności od kwadratu przekazywanego czteropędu  $q^2 = E^2 - p^2 \cdot c^2$ , gdzie  $E$  — przekazywana energia,  $p$  — przekazywany pęd,  $c$  — prędkość światła:



Rys. 1. Zderzenia elastyczne.



Rys. 2. Wszystkie zderzenia — także z produkcją nowych cząstek.



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań z numeru 9/1984

Jerzy Janowicz - Bolesławiec 44,96pkt  
.....  
1 z numeru 10/1984

Zbigniew Kosa - Jelenia Góra 46,73pkt  
Tadeusz Józefczyk - Poznań 44,35pkt  
Piotr Figurny - Lubartów 43,78pkt  
Tomasz Rawlik - Gliwice 43,36pkt  
Ryszard Mazurek - Wrocław 43,20pkt  
Zbigniew Bartold - Gdynia 42,41pkt  
Ryszard Pagacz - Zawadzkie 42,10pkt

Współczynniki trudności zadań  
91 92 93 94 95 96  
3,76 2,20 2,94 3,76 1,21 2,26

Pan Jerzy Janowicz ukończył czwartą rundę!  
Nowe twarze w Klubie 44: Zbigniew Kosa  
i Tadeusz Józefczyk

### Rozwiązania zadań z numeru 12/1984

Przypominamy treść zadań:

**100.** Dwa koła współśrodkowe podzielono na 100 równych sektorów. Na każdym z kół pewne 51 sektorów pomalowano na czerwono, a pozostałe 49 na niebiesko. Dowieść, że można tak obrócić jedno koło względem drugiego, żeby co najmniej 52 sektory jednego koła nałożyły się na sektory drugiego koła o tym samym kolorze.

**101.** W czworokącie wypukłym  $ABCD$  koła wpisane w trójkąty  $ABC, BCD, CDA, DAB$  mają równe promienie. Dowieść, że  $ABCD$  jest prostokątem.

**102.** Dla jakich liczb naturalnych  $n$  zachodzi równość

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = (\sqrt{2})^{n-1}?$$

**100.** Przyjmijmy pewne położenie wzajemne obu kół za „zerowe” i ponumerujmy sektory na obu kołach zgodnie liczbami od 1 do 100. Oznaczmy przez  $R_1$  i  $R_2$  zbiory numerów czerwonych sektorów pierwszego i drugiego koła, a przez  $B_1$  i  $B_2$  zbiory numerów sektorów niebieskich. Zatem  $\{1, \dots, 100\} = R_1 \cup B_1 = R_2 \cup B_2$ ,  $|R_1| = |R_2| = 51$ ,  $|B_1| = |B_2| = 49$  (symbol  $|X|$  oznacza liczbę elementów zbioru  $X$ ). Obracamy teraz pierwsze koło względem drugiego o  $k$  jednostek. Liczba „ułożen zgodnych” (czerwone na czerwonym, niebieskie na niebieskim) będzie równa  $u_k = |(R_1 + k) \cap R_2| + |(B_1 + k) \cap B_2|$ ; symbol  $X + k$  oznacza zbiór  $\{x + k; x \in X\}$ , a dodawanie jest wykonywane modulo 100. Należy dowieść, że  $u_k \geq 52$  dla pewnego  $k \in \{1, \dots, 100\}$ .

Wprowadźmy oznaczenia  $r_1(i) = \begin{cases} 1, & i \in R_1 \\ 0, & i \notin R_1 \end{cases}$ ,  $r_2(i) = \begin{cases} 1, & i \in R_2 \\ 0, & i \notin R_2 \end{cases}$ ,

$$b_1(i) = \begin{cases} 1, & i \in B_1 \\ 0, & i \notin B_1 \end{cases}, \quad b_2(i) = \begin{cases} 1, & i \in B_2 \\ 0, & i \notin B_2 \end{cases}$$

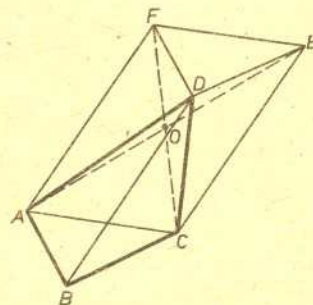
Wówczas:  $i \in (R_1 + k) \cap R_2 \Leftrightarrow r_1(i-k)r_2(i) = 1$ ,  
 $i \in (B_1 + k) \cap B_2 \Leftrightarrow b_1(i-k)b_2(i) = 1$ . Stąd  $|R_1 + k \cap R_2| = \sum_{i=1}^{100} r_1(i-k)r_2(i)$ ,  $|(B_1 + k) \cap B_2| = \sum_{i=1}^{100} b_1(i-k)b_2(i)$ . Zatem

$$\sum_{k=1}^{100} u_k = \sum_k \sum_i r_1(i-k)r_2(i) + \sum_k \sum_i b_1(i-k)b_2(i) = \sum_i r_2(i) \sum_k r_1(i-k) + \sum_i b_2(i) \sum_k b_1(i-k) =$$

$$= \sum_i r_2(i) \cdot |R_1| + \sum_i b_2(i) \cdot |B_1| = |R_2| \cdot |R_1| + |B_2| \cdot |B_1| = 51^2 + 49^2,$$

co jest większe od 5000, a więc co najmniej jedna z liczb  $u_k$  jest większa od 50. Pozostaje zauważyć, że wszystkie  $u_k$  są parzyste, tak, że któraś z tych liczb musi być  $\geq 52$ .

**101.** Weźmy pod uwagę równoległobok  $ACEF$ , którego boki  $\overline{AF}$  i  $\overline{CE}$  są równe i równoległe do przekątnej  $\overline{BD}$ . Trójkąty  $FDE, EDC, CDA, ADF$  są przystające, odpowiednio, do trójkątów  $ABC, BCD, CDA, DAB$ , a więc odcinki łączące punkt  $D$  z wierzchołkami równoległoboku  $ACEF$  dzielą ten równoległobok na cztery trójkąty, w których koła wpisane mają równe promienie.



Niech  $O$  będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku  $ACEF$ . Punkt  $D$  musi się pokrywać z  $O$ ; gdyby tak nie było — gdyby np. punkt  $D$  leżał wewnątrz trójkąta  $OEF$  (jak na rysunku) — to koło wpisane w trójkąt  $FDE$  byłoby mniejsze od koła wpisane w trójkąt  $OEF$  i tym bardziej w trójkąt  $CDA$ . Ze znanej formuły: pole trójkąta równa się połowie iloczynu długości obwodu przez promień koła wpisanego wynika, że trójkąty  $OEF, OFA, OAC, OCE$ , mające równe pola, muszą mieć równe obwody. Zatem równoległobok  $ACEF$  jest rombem (a punkt  $D$  jego środkiem symetrii), czyli czworokąt  $ABCD$  jest prostokątem.

**102.** Oznaczmy przez  $L_n$  lewą stronę równości danej w zadaniu. Użyjemy liczb zespolonych. Równość  $1 + i = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$  podnosimy stronami do  $n$ -tej potęgi, stosując po lewej stronie dwumian Newtona, a po prawej wzór de Moivre'a. Przyporównujemy części urojone otrzymanych wyrażeń:  $L_n = (\sqrt{2})^n \sin n\pi/4$ , a to równa się  $(\sqrt{2})^{n-1}$  dla  $n$  postaci  $8k + 1$  lub  $8k + 3$  ( $k$  całkowite).