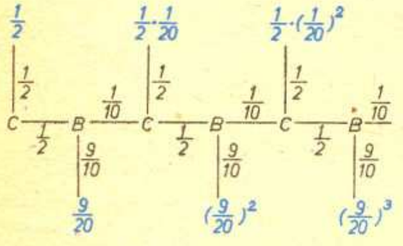
Nietypowy pojedynek

Trzej panowie, nazwijmy ich A, B i C, postanowili stoczyć pojedynek. Ustalono broń — pistolety i reguły walki. Zawodnicy stojąc w wierzchołkach trójkąta mieli w ustalonej losowo kolejności oddawać strzał. Cel mogli wybierać dowolnie.

A był mistrzem, jego kule nigdy nie chybiały; B strzelał nieco gorzej, raz na 10 strzałów pudłował; natomiast tylko połowa strzałów C była celna. Przypuśćmy, że każdy będzie przestrzegał optymalnej dla siebie strategii — tak dobierał cel, by niezależnie od poczynań przeciwników mieć jak największą szansę przeżycia. Czytelniku, czy potrafisz powiedzieć, zwycięstwo którego z panów jest najbardziej prawdopodobne?



Kreski pionowe oznaczają strzał celny, poziome chybiony. Liczby po strzałach celnych podają prawdopodobieństwo takiego zakończenia pojedynku. Prawdopodobieństwo zwycięstwa C jest w tej sytuacji równe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{20}}=\frac{10}{19}.$$

Otóż wcale nie A czy B. Najłatwiej zwyciężyć słabeuszowi C. Co więcej, jego szanse na to zwycięstwo są większe niż $\frac{1}{2}$. Musi on tylko właściwie wybierać cel — dopóki żyją obaj przeciwnicy, strzelać w ... powietrze.

Jeżeli kolejność strzelania dochodzi do B, musi on próbować zabić A — inaczej zginie z jego ręki. Tak samo A musi wybierać B jako swój cel. Jeśli więc A strzela przed B $\left(\text{a prawdopodobieństwo tego jest równe } \frac{1}{2}\right)$, to zabija B i wtedy C zwycięża z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ (gdy nie spudłuje). Sytuacja nieco się komplikuje, gdy B strzela przed A. Pudłuje wtedy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{10}$ i mamy sytuację poprzednią. Jeśli zaś zabije A, to szansa zwycięstwa C jest równa $\frac{10}{19}$ (patrz rysunek). Tak więc prawdopodobieństwo tego, że zwycięży C, jest równe

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{19}=\frac{1}{2}+\frac{9}{760}.$$

J.R.

Zadania

Redaguje mgr Witold MARCISZEWSKI

M 392. Udowodnić, że prosta przechodząca przez wierzchołek A trójkąta ABC i dzieląca na połowy środkową opuszczoną z wierzchołka C dzieli bok BC w stosunku 1 : 2.
Rozwiązanie na str. 12

M 393. Dany jest skończony zbiór kwadratów o sumie pól równej 1. Wykazać, że można je tak ułożyć w kwadracie o boku $\sqrt{2}$, by nie zachodziły na siebie (dla mniejszego kwadratu może to nie być prawdą).
Rozwiązanie na str. 12

M 394. Sto dodatnich liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ spełnia warunki:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{100}^2>10\,000,$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_{100}<300.$$

Wykazać, że wśród tych liczb znajdą się trzy, których suma jest większa od 100.
Rozwiązanie na str. 3

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 168. W silniku fotonowym, opisywanym w literaturze science-fiction, zasób paliwa przetwarzany jest na ukierunkowaną wiązkę światła. Przypuśćmy, że w ciągu 20 lat czasu własnego rakiety chcemy dotrzeć do odległego od Ziemi o 30 tysięcy lat świetlnych centrum Galaktyki. Jaka powinna być minimalna masa paliwa, jeśli końcowa masa rakiety ma być równa 100 ton? Zakładamy, że czas przyspieszania i hamowania rakiety jest dużo krótszy od czasu trwania całego lotu.
Rozwiązanie na str. 13

F 169. Ciśnienie promieniowania można zaobserwować w radiometrze Crooke'a — przyrządzie składającym się z czterech skrzydełek zamocowanych na pionowej osi. Całość zamknięta jest w bańce próżniowej. Jedna strona każdego skrzydełka jest posrebrzona, a druga zaczerniona. Gdy na skrzydełka pada światło, zaczynają się one obracać. Dlaczego kierunek obrotu zależy od tego, czy w bańce jest próżnia, czy też pozostały w niej resztki gazu?
Rozwiązanie na str. 13