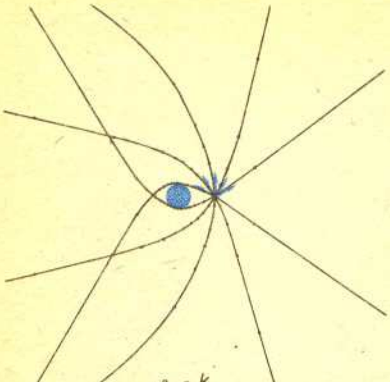
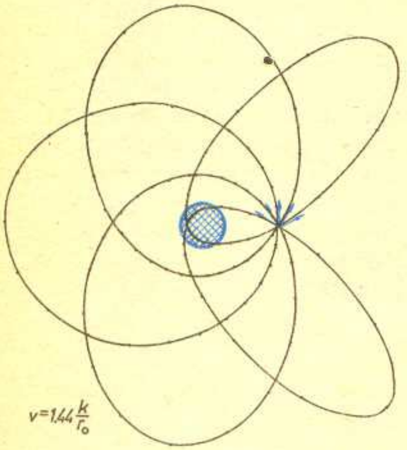
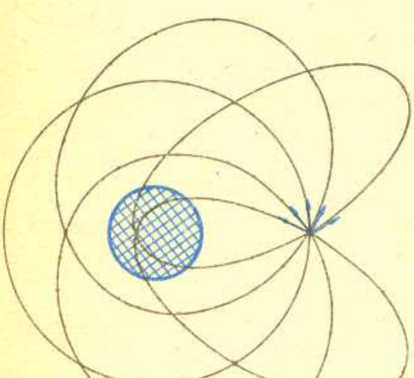


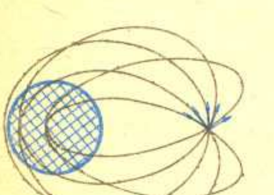
$v^2=3\frac{k}{r}$



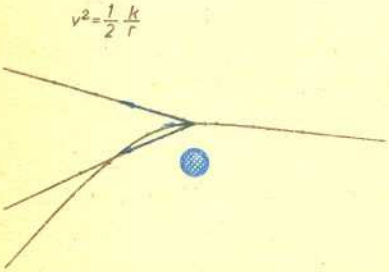
$v=1{,}44\frac{k}{r_0}$



$v^2=\frac{k}{r}$



$v^2=\frac{1}{2}\frac{k}{r}$



Wybuch na orbicie

Zbliża się kometa Halleya. Dokładność, z jaką astronomowie przewidzieli ponowne jej pojawienie się, pozwala wierzyć również w ich zapewnienia, że tym razem na pewno nie nastąpi zderzenie jej jądra z Ziemią. Co by się jednak stało, gdyby w pobliżu Ziemi jądro komety rozpadło się na wiele części? Jak wyglądałby ich ruch i czy spadłyby na Ziemię? Aby odpowiedzieć na te pytania, trzeba umieć znajdować tor ruchu ciała w polu grawitacyjnym Ziemi przy zadanym punkcie startu i prędkości początkowej oraz wiedzieć, jak może rozpaść się kometa. Rozpadnięcie się jądra komety było co prawda obserwowane (por. artykuł T. Kwasta), ale na razie za mało wiemy o kometach, aby dokładnie opisać taki proces. Dobrze umiemy natomiast znajdować tory ruchu ciał w polu grawitacyjnym. W najprostszym przypadku ruchu dwóch ciał problem można rozwiązać bez całkowania równania ruchu

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1}$$

wykorzystując tylko prawa zachowania. W równaniu (1) m oznacza masę ciała, M masę Ziemi, G stałą grawitacji, a $\boldsymbol{r}$ położenie ciała względem środka Ziemi — zakładamy, że $m \ll M$ i Ziemia praktycznie spoczywa, a środek masy układu pokrywa się z jej środkiem. Mnożąc obie strony równania (1) przez $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ i korzystając z faktu, że

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

otrzymujemy prawo zachowania całkowitej energii układu

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 - \frac{k}{r} = \text{constans} \tag{2}$$

(w równaniu (2) oznaczyliśmy iloczyn GMm jako k). Łatwo sprawdzić, że moment pędu $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ również nie zmienia się w czasie ruchu zgodnego z równaniem (1), gdyż $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + m\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{r}\times\left(-\frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = 0.$

Trochę więcej obliczeń wymaga sprawdzenie, że wektor

$$\boldsymbol{C} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{L} - k\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

zachowuje stałą wartość i kierunek. Trzy wielkości E, $\boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{C}$ wystarczają do wyznaczenia równania toru. Mamy bowiem

$$L^2 = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{r}\cdot\left(\boldsymbol{C}+k\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r}+kr,$$

a stąd $r = \dfrac{L^2/k}{1+C\cdot\cos\varphi/k}$,

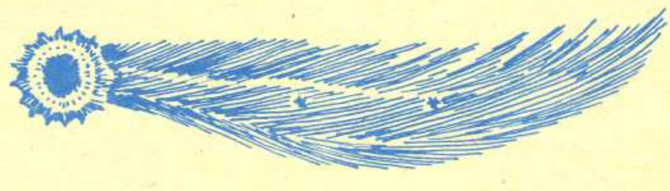
gdzie φ oznacza kąt między wektorami $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{r}$, a jak łatwo sprawdzić

$$C = |\boldsymbol{C}| = (k^2+2L^2E/m)^{1/2}.$$

Wszystkie występujące wielkości można wyznaczyć za pomocą warunków początkowych — prędkości i położenia, możemy więc już znając te warunki wyznaczyć orbitę, po jakiej porusza się ciało. Przekonanie się, że ruch odbywa się po elipsie, gdy $C < k$, po paraboli, gdy $C = k$ lub po hiperboli, gdy $C > k$, jest prostym zadaniem z geometrii analitycznej. O tym, czy ciało porusza się po torze zamkniętym (elipsa), czy też „ucieka" do nieskończoności, decyduje wartość jego energii E. Jeśli $E < 0$, to $C < k$ i ruch odbywa się po elipsie, $E = 0$ odpowiada ruchowi po paraboli, $E > 0$ po hiperboli (ujemna wartość energii oznacza, że układ ciało — Ziemia jest związany i rozerwanie go wymaga wykonania pracy równej przynajmniej $|E|$) — ciała rozbiegające się z jednego punktu z prędkościami o tych samych wartościach, ale różnych kierunkach poruszają się więc po orbitach tego samego typu. Zamieszczone obok rysunki przedstawiają kształty orbit ciał poruszających się w różnych kierunkach z tego samego punktu, odległego o r_0 od środka Ziemi z tą samą prędkością początkową dla różnych wartości tej prędkości (rysunki wykonane są z zachowaniem skali). Na Ziemię spadną te ciała, których tory zbliżą się do Ziemi na odległość mniejszą od jej promienia oraz te spośród pozostałych, które po wejściu w atmosferę stracą tyle energii (opór powietrza), że już nie będą mogły uciec. Minimalną odległość, na jaką zbliży się ciało do środka Ziemi, można wyznaczyć znając tylko energię E i wartość momentu pędu L (oczywiście nie uwzględniając oporu atmosfery). Rozkładając bowiem prędkość chwilową ruchu na składową w w kierunku środka Ziemi (równoległą do $\boldsymbol{r}$) i prostopadłą $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\perp$ mamy $L = mrv_\perp$ i otrzymujemy, że $E = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$, skąd dla małych wartości r mamy $\frac{L^2}{2mr^2} > \frac{k}{r}$. Gdy $r \to 0$, $\frac{L^2}{2mr^2}$ rośnie nieograniczenie, czyli ciało jest odpychane od centrum przyciągającego. Minimalną odległość otrzymamy kładąc $v_r = 0$ i rozwiązując równanie $E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$ (dla orbit zamkniętych otrzymamy w ten sposób również maksymalną odległość toru od centrum). Na naszych rysunkach widać, że wraz ze zwiększeniem prędkości początkowej coraz mniej torów przecina powierzchnię Ziemi. Ostatni z rysunków przedstawia sytuację, w której ciało przybliżające się do Ziemi po orbicie hiperbolicznej rozpada się na trzy równe części poruszające się względem ich wspólnego środka masy z prędkościami równymi połowie prędkości początkowej całego ciała (rozlatują się względem środka masy z kątem między prędkościami każdych dwóch równym 120°, a jedna z części porusza się „do tyłu") — w przypadku rozpadu komety byłyby to prędkości rzędu dziesiątków kilometrów na sekundę. Jak widać, nawet przy tak potężnym wybuchu jądra komety tory ruchu jego części odchylają się nieznacznie od toru początkowego i prawdopodobieństwo ich spadku na Ziemię jest nieduże.

Rozpadnięcie się komety Halleya raczej nam nie grozi, ale otrzymane równania z powodzeniem opisują również ruch meteoroidów w obszarze oddziaływania Ziemi (to znaczy w obszarze, gdzie wpływ innych planet można pominąć) oraz ruch planet w polu grawitacyjnym Słońca. Zasada zachowania energii i momentu pędu jest spełniona w każdym ruchu w polu sił centralnych (zależnych tylko od odległości), natomiast istnienie wektora $\boldsymbol{C}$ (wektor Rungego — Lenza) jest szczególną własnością ruchu w potencjale typu $\pm k/r$, a więc w polu grawitacyjnym i elektrostatycznym. W świecie atomowym (elektrony i protony oddziałują głównie elektrostatycznie) istnienie dodatkowej symetrii oddziaływania (istnienie stałego wektora $\boldsymbol{C}$) powoduje występowanie „przypadkowych" degeneracji poziomów o różnych momentach pędu w widmie energetycznym atomu wodoru.

A. M.



Rozwiąż to w pamięci!

Przecinamy sześcian czterema płaskimi cięciami: dwoma — wzdłuż obu przekątnych jednej ze ścian, prostopadle do tej ściany, oraz analogicznie wzdłuż przekątnych ściany sąsiedniej. Na ile części został pocięty sześcian?

Proof

Rozwiązanie

Postawmy sześcian na stole. Niech dwa pierwsze cięcia przebiegają wzdłuż przekątnych ściany bocznej. Otrzymamy cztery części: "dolną", "górną" i dwie "boczne". Dwa następne cięcia niech będą poprowadzone wzdłuż przekątnych górnej ściany sześcianu. Podzielą one zarówno część "dolną", jak i "górną" na cztery części, natomiast każdą z części "bocznych" na trzy części. Wobec tego sześcian podzielony zostanie na 14 części.