Jest to skrót pracy nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 1984 r.

Rozkład figury zawierającej swój środek symetrii

Michał WOJCIECHOWSKI

Wiadomości Matematyczne wydawane są przez Polskie Towarzystwo Matematyczne dla członków Towarzystwa i bibliotek.

Bodźcem do napisania tej pracy było zadanie z *Wiadomości Matematycznych* t. XXIII.I: „Udowodnić, że jeżeli F jest figurą ograniczoną, zawartą w płaszczyźnie, mającą środek symetrii należący do tej figury, to F nie można rozłożyć na dwie rozłączne figury przystające", podane z adnotacją, iż rozwiązanie nie jest znane redakcji.

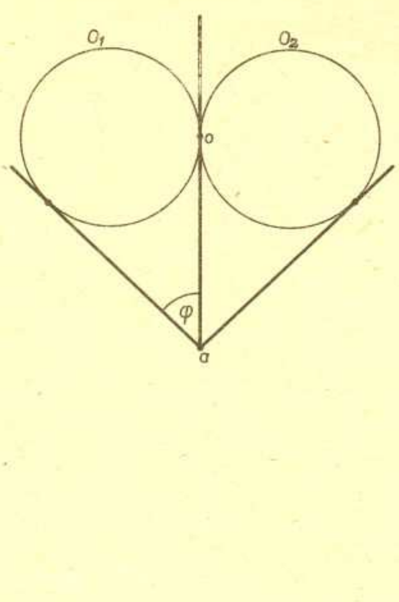
Ponieważ dla figur o skończonej liczbie elementów udowodnić to jest bardzo łatwo, gdyż taka figura musiałaby mieć nieparzystą, a jednocześnie parzystą liczbę elementów, wydawać by się mogło, że dowód dla dowolnych figur nie będzie dużo trudniejszy. Intuicja ta okazała się złudna. Poświęciwszy dużo czasu na bezowocne próby udowodnienia powyższego twierdzenia zająłem się szukaniem przykładu, który by je obalił.

Na początek zbadałem, jaka może być izometria przekształcająca jedną z części podziału na drugą. Okazało się, że takim przekształceniem może być jedynie obrót wokół punktu różnego od środka symetrii figury F. Założenie, że jest to inna izometria, prowadzi do sprzeczności. Wykorzystując tę informację pokusiłem się o próbę skonstruowania takiej figury, która to próba zakończyła się powodzeniem.

Oto krótki opis konstrukcji.

Obierzmy dwa różne punkty o i a. Pierwszy z nich to środek symetrii budowanej figury, drugi zaś to środek obrotu realizującego przystawanie figur rozkładu.

Konstrukcja jest rekurencyjna. Punkt o należy do F_1 (jedna z figur podziału), $R_p^\varphi(o)$ należy do F_2 (R_p^φ jest obrotem wokół punktu p, o kąt φ niewspółmierny z π), $S_o R_p^\varphi(o)$ należy do F_1 (S_0 jest symetrią względem punktu o), $R_p^\varphi S_o R_p^\varphi(o)$ należy do F_2 i tak dalej — składamy na przemian R_p^φ i S_o, a kolejne obrazy punktu o należą raz do F_1, a raz do F_2. Konstrukcja ta jest poprawna: żadne dwa tak skonstruowane punkty nie pokrywają się (temu służyło założenie niewspółmierności φ z π), a zatem figury F_1 i F_2 są rozłączne. Ponadto o jest środkiem symetrii $F_1 \cup F_2$ i należy do $F_1 \cup F_2$ oraz $R_p^\varphi(F_1) = F_2$.



Zbiór F „wygląda" następująco:
Figura F_1 jest zawarta w okręgu O_1, a figura F_2 w okręgu O_2. Uzupełniając figurę F_1 kołem otwartym okręgu O_1, a figurę F_2 kołem otwartym okręgu O_2, uzyskamy figurę spójną spełniającą warunki zadania.

Zauważmy, że jeśli $N_1 = O_1 \setminus F_1$ i $N_2 = O_2 \setminus F_2$, to N_1 i N_2 spełniają warunki zadania i różnią się od swoich domknięć o przeliczalną liczbę punktów.

Nie był to koniec moich rozważań na temat tego zadania. Powodowany ciekawością zamieniłem w jego treści słowa „figury przystające" na „figury środkowo symetryczne". Okazało się, że i w tym przypadku istnieje kontrprzykład.

W tym momencie zupełnie naturalne staje się pytanie, które sobie postawiłem (poświęcając na odpowiedź drugą część pracy): czy figury podziału mogą być jednocześnie przystające i środkowo symetryczne. Problem ten okazał się trudniejszy od poprzednich. Znalezione przeze mnie rozwiązanie składa się z następujących kroków:

1° Jeżeli F_1 i F_2 są figurami rozłącznymi, a F_1, F_2, $F_1 \cup F_2$ są figurami ograniczonymi i środkowo symetrycznymi, to ich środki symetrii są współliniowe.

2° Jeżeli F_1 i F_2 są figurami ograniczonymi, przystającymi, rozłącznymi i środkowo symetrycznymi, a $F_1 \cup F_2$ jest figurą środkowo symetryczną, to środek symetrii $F_1 \cup F_2$ jest środkiem odcinka o końcach będących środkami symetrii odpowiednio F_1 i F_2.

3° Jeżeli F_1 i F_2 są figurami ograniczonymi, przystającymi, rozłącznymi i środkowo symetrycznymi, a $F_1 \cup F_2$ jest figurą środkowo symetryczną, to albo środki symetrii F_1 i F_2 pokrywają się, albo $S_o(F_1) = F_2$ (gdzie o jest środkiem symetrii $F_1 \cup F_2$).

Stąd już prosto wynika odpowiedź: nie istnieje figura ograniczona i mająca środek symetrii należący do niej, którą można rozłożyć na dwie rozłączne figury przystające i środkowo symetryczne.