Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1985.

Zadania z matematyki nr 107, 108

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1985

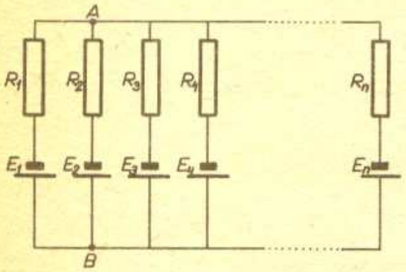
107. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na kole. K, L, M, N są odpowiednio punktami styczności boków $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ z kołem. Udowodnić, że proste KL, MN i AC przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

108. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c. Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu, którego pierwszymi trzema wyrazami są liczby a, b, c, a dalej każdy wyraz jest średnią arytmetyczną trzech wyrazów poprzedzających.

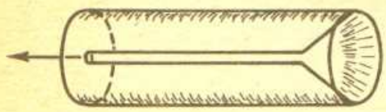
Zadanie **108** nadesłał pan Andrzej Pawłowski z Zabrza.

Zadania z fizyki nr 5, 6

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

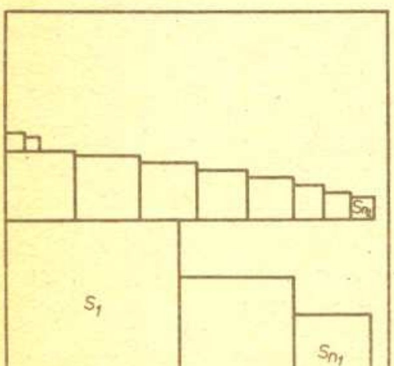


5. Obliczyć napięcie panujące między punktami A i B układu złożonego z n gałęzi, zawierających dowolne oporności R_i i źródła siły elektromotorycznej E_i, $(i = 1, \ldots, n)$ — jak na rysunku.



6. Dany jest walec wydrążony w taki sposób, że wzdłuż całej jego osi biegnie kanał, który rozszerza się stożkowo z jednego końca (patrz rysunek). Podczas poruszania tego walca w kierunku oznaczonym strzałką do kanału od jego wąskiej strony wpada powietrze. Po przepłynięciu powietrza do części stożkowej kanału jego ciśnienie — zgodnie z prawem Bernoulliego — wzrasta. Ciśnienie to, działając na ścianki stożkowego kanału, wywiera na walec pewną siłę nadając mu napęd w kierunku ruchu. Mamy więc perpetuum mobile. Wykazać błąd w powyższym rozumowaniu.

Rozwiązanie zadania M 393. Ustawiamy boki kwadratów w ciąg malejący $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots$ W lewym dolnym rogu dużego kwadratu umieszczamy kwadrat o boku s_1, obok niego kwadrat o boku s_2 i tak dalej, dopóki jest to możliwe; następny kwadrat o boku s_{n_1+1} umieszczamy nad pierwszym kwadratem i znów posuwamy się w prawo, dopóki jest to możliwe; kwadrat o boku s_{n_2+1} umieszczamy w trzecim rzędzie poczynając od lewej strony i tak dalej (patrz rysunek).



Tak więc zachodzą nierówności

$$(1)\quad \begin{aligned} &\sqrt{2} - s_{n_1+1} < s_1 + \ldots + s_{n_1} \leqslant \sqrt{2} \\ &\sqrt{2} - s_{n_2+1} < s_{n_1} + \ldots + s_{n_2} \leqslant \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Z pierwszej z nierówności (1) mamy

$$(\sqrt{2} - s_1)s_{n_1+1} < (s_2 + \ldots + s_{n_1+1})s_{n_1+1} \leqslant$$
$$\leqslant s_2^2 + \ldots + s_{n_1+1}^2,$$

analogicznie z następnej nierówności mamy

$$(\sqrt{2} - s_1)s_{n_2+1} \leqslant (\sqrt{2} - s_{n_1+2})s_{n_2+1} <$$
$$< s_{n_2+2}^2 + \ldots + s_{n_2+1}^2 \text{ itd.}$$

Dodając powyższe nierówności otrzymujemy

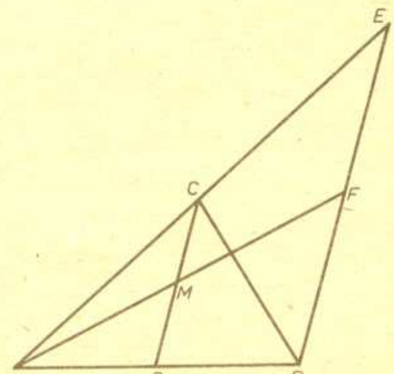
$$(\sqrt{2} - s_1)(s_{n_1+1} + s_{n_2+1} + \ldots + s_{n_k+1}) \leqslant$$
$$\leqslant s_2^2 + \ldots + s_{n_k+1}^2 \leqslant 1 - s_1^2,$$

skąd

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{n_k} \leqslant s_1 + \frac{1 - s_1^2}{2 - s_1} =$$
$$= \sqrt{2} - \frac{(1 - \sqrt{2}s_1)^2}{2 - s_1} < \sqrt{2},$$

a więc wszystkie rzędy się zmieszczą.

Rozwiązanie zadania M 392. Niech E będzie punktem przecięcia prostej AC z prostą równoległą do środkowej CD i przechodzącą przez wierzchołek B, M będzie środkiem odcinka CD, a F punktem przecięcia prostych AM i BE. Wówczas F jest środkiem odcinka BE, a C środkiem odcinka AE, a więc AF i BC są środkowymi trójkąta ABF, czyli dzielą się w stosunku 1:2.



Rozwiązania zadań z numeru 11/1984

Przypominamy treść zadań:

97. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Dowieść, że każda liczba $x \in (0,1)$ ma wielokrotność kx spełniającą warunek $n^2(n+1)^{-1} \leqslant kx < n$.

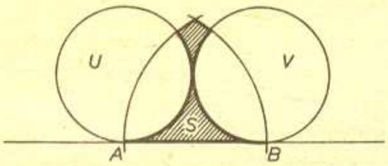
98. Uzasadnić istnienie i znaleźć wartość granicy $\lim 2^n x_n$, gdzie $x_1 = 1$, $x_{n+1} = (\sqrt{1+x_n^2}-1)/x_n$.

99. Na płaszczyźnie dany jest odcinek $\overline{AB}$ o długości c. Wyznaczyć wszystkie położenia punktu C, przy których $\overline{AB}$ jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC oraz $h_a \leqslant a$, $h_b \leqslant b$, $h_c \leqslant c$.

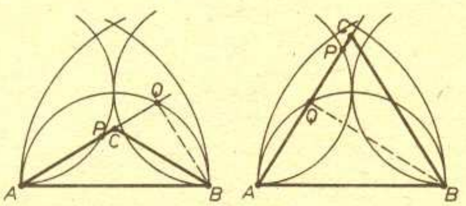
97. Przedział $I = \langle n^2(n+1)^{-1}, n)$ ma długość $d = n(n+1)^{-1}$. Jeśli więc $x < d$, to $kx \in I$ dla pewnego k. Jeśli zaś $d \leqslant x < 1$, to $nx \in I$.

98. Niech W_n będzie 2^{n+1}-kątem foremnym opisanym na kole o promieniu jednostkowym i niech a_n oznacza połowę długości boku W_n. Wówczas $a_n = \mathrm{tg}\varphi_n$, gdzie $\varphi_n = \pi/2^{n+1}$. Zatem $\varphi_n = 2\varphi_{n+1}$, skąd $a_n = 2a_{n+1}/(1-a_{n+1}^2)$ i w konsekwencji $a_{n+1} = \left(\sqrt{1+a_n^2}-1\right)/a_n$. Otrzymana formuła rekurencyjna jest identyczna z tą, która definiuje ciąg (x_n); ponadto $a_1 = 1$, bo W_1 jest kwadratem o boku 2. Wobec tego $x_n = a_n$ dla wszystkich n. Długość obwodu W_n wynosi $2^{n+1} \cdot 2a_n$ i dąży (przy $n \to \infty$) do długości okręgu jednostkowego, czyli do 2π. Stąd $\lim 2^n x_n = \pi/2$.

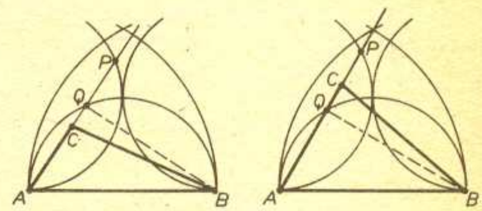
99. Rozważania ograniczymy do jednej z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą AB (po drugiej stronie sytuacja jest symetryczna). Punkt C musi leżeć w soczewce S utworzonej przez łuki okręgów o środkach A, B i promieniu c (w przeciwnym razie $a > c$ lub $b > c$). Niech U i V będą kołami o promieniu $c/2$ stycznymi do prostej AB w punktach A i B. Pokażemy, że dopuszczalne położenia punktu C (w górnej półpłaszczyźnie) wypełniają obszar $S-(U \cup V)$ wraz z brzegiem (rys. 1). Dla dowodu zbudujmy jeszcze półkole W na średnicy $\overline{AB}$ i oznaczmy przez P i Q punkty, w których półprosta $AC^{\rightarrow}$ przecina obwody U i V (odpowiednio). Wówczas $AP = BQ = h_b$. Przy położeniach punktu C jak na rysunku 2 mamy $AP < AC$, czyli $h_b < b$, a przy położeniach jak na rysunku 3 zachodzi nierówność przeciwna. Dyskusja nierówności $h_a < a$ jest analogiczna. Natomiast $h_c < c$ zawsze, bo $\overline{AB}$ jest najdłuższym bokiem.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Rozwiązanie zadania F 168. Rozważmy ruch rakiety względem Układu Słonecznego. Z zasady zachowania pędu wynika, że pęd rakiety jest równy co do wartości pędowi wyemitowanych fotonów. Przez p, M, v oznaczmy odpowiednio pęd, masę i prędkość rakiety po wyłączeniu silnika. Jeśli założymy, że fotony powstają na drodze anihilacji materii, to z zasady zachowania energii

$$M_0c^2 = p \cdot c + Mc^2, \tag{1}$$

gdzie M_0 — początkowa masa rakiety, a pc — energia fotonów o pędzie p. Jednocześnie pęd rakiety po wyłączeniu silnika

$$p = M \cdot v,$$

co po podstawieniu do (1) daje

$$p = \frac{v}{c+v} M_0c. \tag{2}$$

Taki sam pęd trzeba przekazać rakiecie podczas hamowania.

Końcową masę rakiety M_k obliczamy z zasady zachowania energii:

$$M_0c^2 = 2pc + M_kc^2.$$

Stąd i z (2)

$$M_k = \frac{c-v}{c+v} M_0. \tag{3}$$

Zjawisko dylatacji czasu powoduje, że ziemski czas trwania podróży $t = R/v$ (R — odległość Ziemia — centrum Galaktyki) jest w układzie rakiety równy

$$\tau = t\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Stąd prędkość rakiety: $v = \dfrac{c}{\sqrt{1+\left(\dfrac{c\tau}{R}\right)^2}}$

Ponieważ dla danych w zadaniu $c\tau \ll R$, możemy skorzystać z przybliżenia $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq$ $\simeq 1 - \dfrac{1}{2}x$ — co daje $v \simeq c\left(1 - \dfrac{c^2\tau^2}{2R^2}\right)$.

Po podstawieniu do (3) otrzymujemy

$$M_0 \simeq \left(\frac{2R}{c\tau}\right)^2 M_k \simeq 9 \times 10^8 \text{ ton}.$$

Paliwo powinno więc stanowić prawie całą masę rakiety.

Rozwiązanie zadania F 169. Foton padając na powierzchnię skrzydełka przekazuje mu pewien pęd. Ciśnienie jest równe całkowitej zmianie pędu fotonów uderzających w jednostkową powierzchnię w jednostce czasu.

Średnio zmiana pędu fotonu odbijającego się od powierzchni jest dwukrotnie większa niż zmiana pędu przy absorpcji. Dlatego też ciśnienie światła na ściankę posrebrzoną jest większe niż na poczernioną.

Gdy w bańce są resztki gazu, efekt jest na ogół przeciwny. Wiąże się to z faktem, iż powierzchnia zaczerniona absorbuje więcej energii i jest cieplejsza niż posrebrzona. Cieplejszy jest również gaz przy tej powierzchni: cząsteczki gazu mają większą średnią prędkość i przy zderzeniach przekazują powierzchni większy pęd.

Doświadczenie pokazuje, że wystarczy niewielka ilość gazu, aby efekt ten był dominujący. Dlatego też większość radiometrów Crooke'a obraca się w kierunku przeciwnym do spodziewanego.