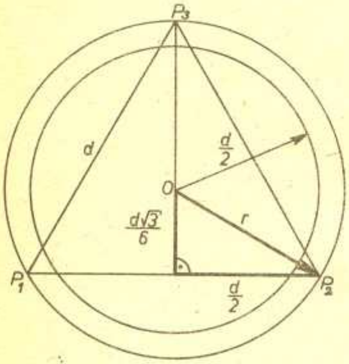
Jak zakryć plamę na obrusie

Mgr Jarosław GÓRNICKI

Średnicą figury płaskiej f nazywamy kres górny odległości między punktami f, tzn. liczbę $\sup\{AB: A \in f, B \in f\}$.

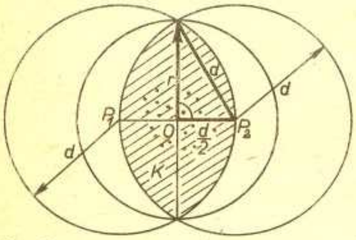


Rys. 1

Tytułowe pytanie sformułujemy precyzyjnie. Jaki jest najmniejszy promień koła zakrywającego plamę o średnicy d? Dla uproszczenia załóżmy, że plama składa się ze skończonej liczby punktów. Pierwsza, narzucająca się odpowiedź, $\frac{d}{2}$, jest nieprawidłowa. Otóż, wierzchołki trójkąta równobocznego o boku długości d nie mieszczą się w żadnym kole o promieniu $\frac{d}{2}$. Koło, do którego te punkty należą, musi mieć promień co najmniej $\frac{d}{\sqrt{3}} > \frac{d}{2}$ (rys. 1).

Zbiór punktów $\{A_1, \dots, A_n\}$ o średnicy d na pewno możemy przykryć kołem o promieniu d i środku w dowolnym z tych punktów. Możemy też przykryć je mniejszym kołem. Wybierzmy dowolną parę punktów (powiedzmy A_1 i A_2) odległych o d. Wtedy wszystkie punkty $A_1, \dots, A_n$ należą do części wspólnej kół o środkach A_1 i A_2 oraz promieniu d. Ale ta część wspólna jest zawarta w kole o środku O i promieniu $r = \frac{\sqrt{3}}{2} d < d$ (rys. 2).

Figurę nazywamy wypukłą, jeśli odcinek łączący dowolne dwa jej punkty jest w niej całkowicie zawarty. W szczególności jeśli do figury wypukłej należą wierzchołki wielokąta, to cały wielokąt jest w niej zawarty.

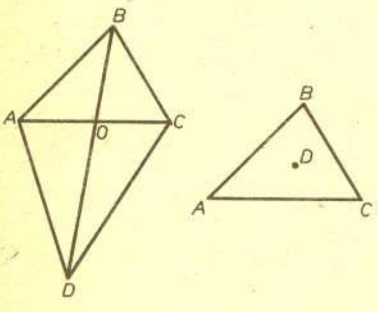


Rys. 2

W znalezieniu odpowiedzi na pytanie z początku artykułu pomocne będą pewne fakty dotyczące figur wypukłych.

Twierdzenie Helly'ego (*I wersja*). Jeśli każde trzy spośród figur wypukłych $f_1, \dots, f_n$ ($n \geq 3$) mają punkt wspólny, to wszystkie mają punkt wspólny (tzn. $f_1 \cap \dots \cap f_n \neq \emptyset$).

Dowód dla $n = 4$ sprowadza się do rozważenia trójkątów (z brzegiem) o wierzchołkach należących do zbioru czteroelementowego $\{A, B, C, D\}$ — dla dowolnych czterech figur wybieramy po jednym punkcie z czterech przecięć „po trzy figury". Albo czworokąt $ABCD$ jest wypukły i wtedy punkt O przecięcia przekątnych należy do wszystkich czterech trójkątów, albo nie i wtedy np. D należy do trójkąta ABC, a zatem należy do wszystkich trójkątów (rys. 3).

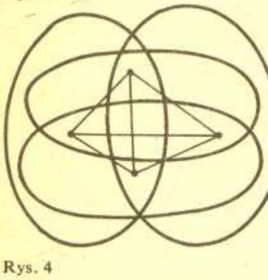


Rys. 3

Każdy z trójkątów będzie teraz zawarty w pewnej z figur i ich część wspólna, niepusta, zawarta będzie w części wspólnej wszystkich czterech figur.

Dalszy dowód twierdzenia jest indukcyjny.
Zastępujemy $n+1$ figur $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ przez n figur $f_1 \cap f_2, f_3, \dots, f_{n+1}$ o tej samej części wspólnej. To, że dla n figur jest spełnione założenie twierdzenia, wynika albo bezpośrednio z założenia dla figur $f_1, \dots, f_{n+1}$, albo z udowodnionego przypadku $n = 4$.

Twierdzenie Helly'ego (*II wersja*). Jeśli każde trzy figury z rodziny $\mathcal{F}$ ograniczonych i domkniętych figur wypukłych mają punkt wspólny, to wszystkie figury z rodziny $\mathcal{F}$ mają punkt wspólny.



Rys. 4

Założenie domkniętości i ograniczoności figur jest tu istotne. Jako kontrprzykład można podać ciąg kół otwartych, stycznych do ustalonej prostej w ustalonym punkcie i o promieniach dążących do zera (rys. 5) lub ciąg półpłaszczyzn wyznaczonych przez równoległe proste leżące w równych odległościach.

Ta druga wersja twierdzenia Helly'ego posłuży nam do redukcji naszego problemu.

Wniosek. Jeśli każde trzy punkty figury można przykryć kołem o promieniu r, to i całą figurę też można przykryć takim kołem.

Oba twierdzenia Helly'ego są prawdziwe w wersji wielowymiarowej. Jeśli rodzina zbiorów wypukłych w przestrzeni k-wymiarowej R^k jest skończona albo składa się ze zbiorów domkniętych i ograniczonych, oraz każde $k+1$ zbiorów z tej rodziny ma punkt wspólny, to istnieje punkt należący do wszystkich zbiorów z tej rodziny.

Dowód. Mamy pokazać, że pewien punkt płaszczyzny jest oddalony od dowolnego punktu figury f o nie więcej niż r. Ponieważ każde trzy punkty figury f, np. A, B, C, można przykryć kołem o promieniu r, więc środek X takiego koła należy do trzech kół o promieniach r i środkach w punktach A, B, C (odległość punktu X od każdego z punktów A, B, C nie jest większa niż d) (rys. 6). Tak więc każde trzy koła o promieniach r i środkach należących do figury f mają punkt wspólny. Z twierdzenia Helly'ego wynika istnienie punktu O, który należy do wszystkich kół o środkach w figurze f i promieniach r, co oznacza, że koło o promieniu d i środku w punkcie O przykrywa całą figurę f.

Wniosek ten pozwala udzielić odpowiedzi na postawione wcześniej pytanie.

Twierdzenie (*H. W. E. Jung, 1901*). Dowolną figurę płaską f o średnicy d można zawrzeć w kole o promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$.

Dowód. Obierzmy dowolne trzy punkty figury f, np. A, B, C. Każdy z trzech boków trójkąta ABC ma długość nie przekraczającą d. Jeśli trójkąt ABC jest rozwartokątny lub prostokątny, to zawiera się on w kole, którego brzegiem jest okrąg opisany na jego najdłuższym boku jako na średnicy (rys. 7). Promień takiego koła nie przekracza wartości $\frac{d}{2} < \frac{d}{\sqrt{3}}$. Jeżeli trójkąt ABC jest ostrokątny, to miara przynajmniej jednego z kątów, np. kąta przy wierzchołku A, którą oznaczymy α, mieści się w przedziale $\frac{\pi}{2} > \alpha \geqslant \frac{\pi}{3}$. Wówczas $\sin\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, a ponieważ długość boku BC leżącego naprzeciw wierzchołka A jest nie większa niż d, więc średnica $2R$ okręgu opisanego na trójkącie ABC, która jest równa $\frac{d}{\sin\alpha}$ nie przewyższa $\frac{2d}{\sqrt{3}}$, czyli $R \leqslant \frac{d}{\sqrt{3}}$ (rys. 8). Tym samym pokazaliśmy, że dowolne trzy punkty figury f o średnicy d można przykryć kołem o promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$. Zatem na podstawie poprzedniego wniosku całą figurę f można przykryć kołem o promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$, co kończy dowód.

Zauważmy, że wyniku tego twierdzenia nie można polepszyć, o czym świadczy podany na początku przykład.

Jung badał również analogiczne zagadnienie w przypadku n-wymiarowym i wykazał, że każdą n-wymiarową bryłę o średnicy d można zawrzeć w n-wymiarowej kuli o promieniu $r = d\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$. W przypadku $n = 3$ wyniku tego również nie można polepszyć, bowiem najmniejszym promieniem kuli, w której można zawrzeć czwórkę punktów umieszczonych w wierzchołkach czworościanu foremnego o krawędzi długości d, jest właśnie $r = d \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$.

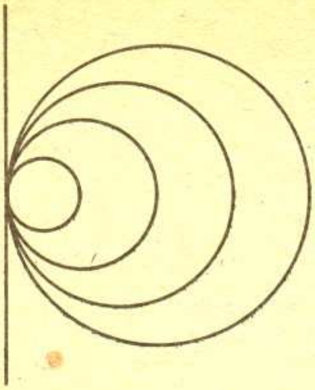
Ściśle z twierdzeniem Junga wiąże się następujący problem, którego rozwiązanie dotychczas nie jest znane: znaleźć figurę o najmniejszym polu, którą można by pokryć każdą figurę płaską o średnicy d. Wykazano tylko istnienie figury o najmniejszym polu, która pokrywa każdą figurę płaską o średnicy d. Z twierdzeń tych nie można wysnuć żadnych wniosków co do kształtu tej figury.

Na przykład koło z twierdzenia Junga ma pole równe $\frac{\pi}{3}d^2$. Nie jest to rozwiązanie przedstawionego wyżej problemu. Świadczy o tym twierdzenie będące wzmocnieniem twierdzenia Junga (dowód można znaleźć np. w książce I. M. Jagłom, W. G. Bołtiański — *Figury wypukłe*):

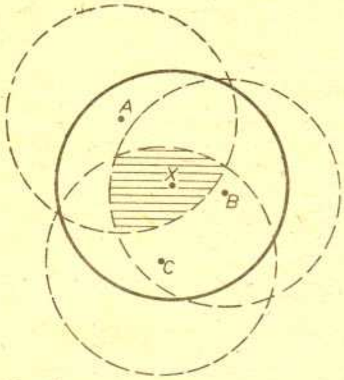
Każdą figurę płaską o średnicy d można pokryć sześciokątem foremnym, którego bok jest równy $\frac{d}{\sqrt{3}}$.

Sześciokąt foremny z tego twierdzenia (rys. 9) ma pole równe $\frac{\sqrt{3}}{2}d^2 < \frac{\pi}{3}d^2$.

Czy jest to ostatnie słowo — nie wiadomo!

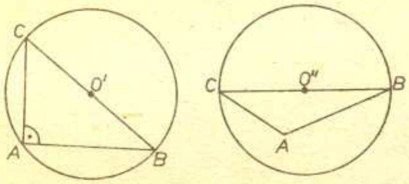


Rys. 5

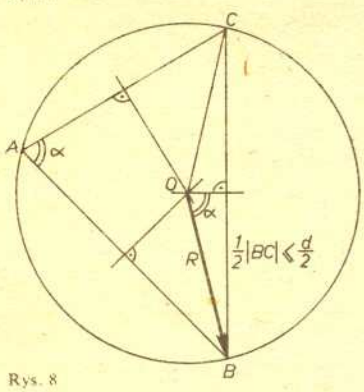


Rys. 6

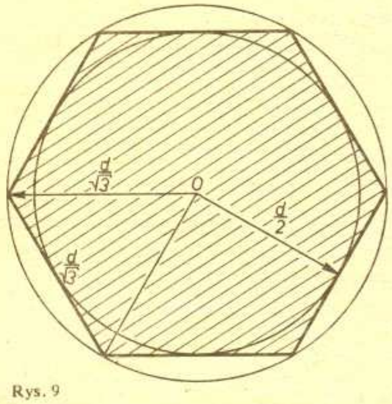
Niektórzy uważają, że zaplamiony obrus najlepiej wyprać.



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9