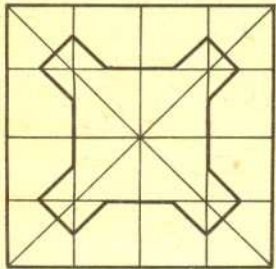


Turbulencja i fraktale

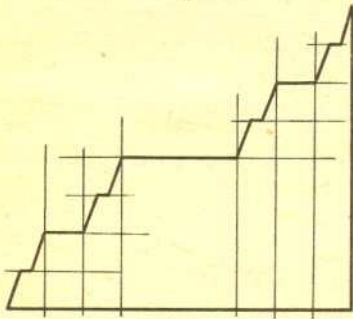
Mgr

Piotr RĄCZKA

Krzywe fraktalne w tym numerze *Delty* pochodzą ze znakomitej książki Benoita B. Mandelbrota *Fractals* (W. H. Freeman and Company, 1977).



Rys. 1. Kolejne przybliżenia dywanu Sierpińskiego — struktura samopodobna.



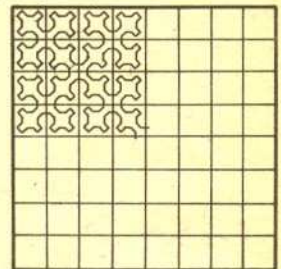
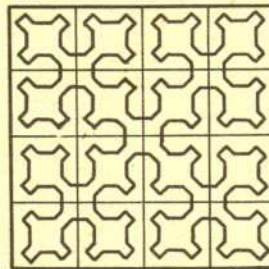
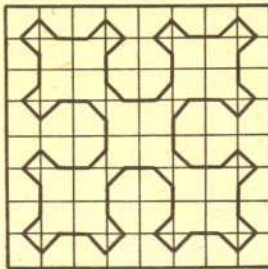
Rys. 2. Wykres funkcji, która jest nieciągła w punktach należących do zbioru Cantora i stała poza nim (tzw. Diablskie Schody).

Rys. 3. Wytwarzanie turbulencji w tunelu aerodynamicznym za pomocą kraty.

Terminem turbulencja określa się gwałtowne, burzliwe zachowanie się płynów. Przykładów turbulencji nie trzeba szukać daleko — przypuszczam, że każdy z Czytelników miał okazję widzieć załamywanie się fal, wzburzony ślad za statkiem albo intensywny strumień wody z ogrodowego węża. Praktycznie wszystkie przepływy spotykane w przyrodzie są, przynajmniej częściowo, turbulentne.

Mimo swej powszechności turbulencja wciąż jest dla uczonych zagadką, a teoria turbulencji po stu latach różnych prób nie może pochwalić się znaczącymi rezultatami. W szczególności nie znamy do tej pory przyczyn powstawania turbulencji i nie umiemy przewidywać ewolucji ruchu turbulentnego.

Turbulencja obfituje w różnego rodzaju zaskakujące zjawiska. Ciekawa jest już sama geometria przepływów turbulentnych. Okazuje się bowiem, że w takich przepływach obszar turbulentny (tzn. obszar, w którym prędkość płynu gwałtownie się zmienia na krótkich odcinkach) zajmuje tylko część przestrzeni, w której zachodzi przepływ. Łatwo jest zauważyć, że nawet w najbardziej burzliwych przepływach istnieją obszary „spokojne”, występujące w charakterystyczny sposób — im dokładniej analizujemy rozkład prędkości, tym więcej takich obszarów widzimy. Inaczej mówiąc, struktura obszaru turbulentnego przypomina trochę ser szwajcarski — obszar ten składa się prawie wyłącznie z dziur! Ma on również własności „jakościowego samopodobieństwa”. Oznacza to, że w wielu przypadkach nie potrafilibyśmy odróżnić zdjęcia przepływu turbulentnego w skali 1:1 od zdjęcia zrobionego w wielokrotnym powiększeniu (podobne własności ma np. tzw. Dywan Sierpińskiego, rys. 1).



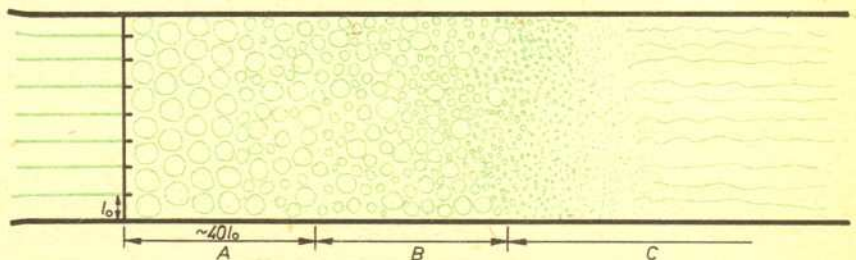
Są to własności charakterystyczne dla obiektów o ułamkowym wymiarze (patrz artykuł J. Rylla w tym numerze), co skłoniło Benoita Mandelbrota, wielkiego ich entuzjastę, do wysunięcia hipotezy, że obszar, na którym skupiona jest turbulencja, jest fraktalem. Zgodnie z tą hipotezą rozkład prędkości płynu powinien przypominać wykres funkcji przedstawionej na rysunku 2.

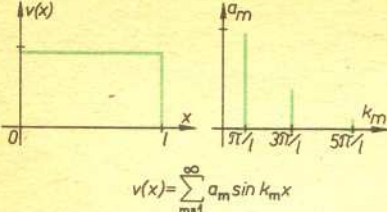
W dalszej części artykułu pokażę, jak można zweryfikować hipotezę Mandelbrota dla najprostszego przypadku turbulencji, tzw. turbulencji izotropowej.

Zanim sprzeczujemy znaczenie terminu „turbulencja izotropowa”, przyjrzyjmy się pewnej szczególnej realizacji przepływu turbulentnego. Rysunek 3 przedstawia schematycznie zachowanie się turbulencji wytworzonej w tunelu aerodynamicznym za pomocą kraty wstawionej prostopadle do jednorodnego strumienia. Krata powoduje powstanie w strumieniu wirów, których typowe rozmiary są rzędu wielkości „oczka” w kratce. Wiry te rozpadają się następnie na mniejsze, te zaś na jeszcze mniejsze itd. (obszar A).

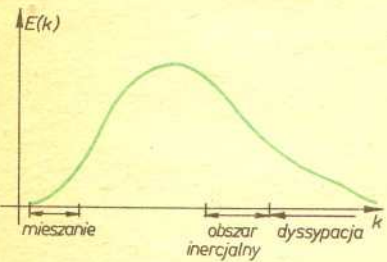
W obszarze B najmniejsze wiry są już kilka rzędów wielkości mniejsze od wirów powstałych na kratce. Jest to obszar, gdzie ewolucja wirów trwała na tyle długo, że zdążyła się wykształcić „struktura drobnoziarnista”, a przy tym na tyle krótko, że straty energii ze względu na lepkość płynu jeszcze nie są istotne.

W obszarze C następuje zanik turbulencji na skutek spowodowanej lepkością płynu dyssypacji energii kinetycznej na ciepło.





Rys. 4. Rozkład prostego pola prędkości na składowe harmoniczne.



Rys. 5. Typowy kształt widma energii.

Wyobraźmy sobie teraz ruch turbulentny, który by powstał, gdybyśmy potrafili w całej przestrzeni z jednakową wszędzie intensywnością generować (w bliżej nieokreślony sposób, zwany dalej „mieszaniem”) wiry o zadanej wielkości. Ten właśnie wyidealizowany przypadek turbulencji, charakteryzujący się wysoką symetrią, nazywa się turbulencją izotropową. Oczywiście nie istnieją zjawiska, w których izotropowość turbulencji byłaby ścisła. W wielu przypadkach można jednak przyjąć, że turbulencja jest w niewielkich obszarach izotropowa.

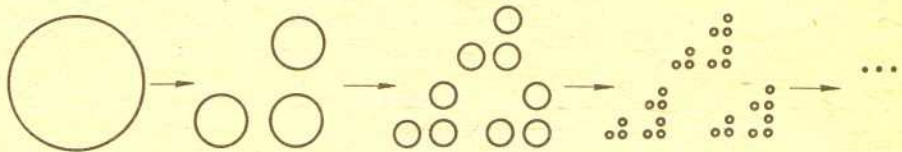
Jedną z charakterystyk turbulencji izotropowej jest funkcja określająca rozkład całkowitej energii kinetycznej układu między wiry o różnych rozmiarach, tzw. widmo energii. Jak zapewne Czytelnikowi wiadomo, pole prędkości można przedstawić w postaci sumy składowych harmonicznym względem zmiennych przestrzennych. W szczególności, jeśli wir ma rozmiar rzędu l , to w rozkładzie jego pola prędkości na składowe harmoniczne dominować będą składowe odpowiadające wektorom falowym o długości k rzędu $\frac{1}{l}$ (rys. 4). Widmo energii $E(k)$ definiujemy jako wartość średnią energii kinetycznej na jednostkę masy płynu i jednostkę długości wektora falowego. Funkcja $E(k)$ mówi nam, jaki wkład do całkowitej energii kinetycznej układu wnoszą wiry o rozmiarach rzędu $\frac{1}{k}$. Widmo energii można wyznaczyć eksperymentalnie.

Kształt widma (rys. 5) odzwierciedla sposób, w jaki energia przepływa przez układ. Energia jest wprowadzana przez mieszanie, czyli tworzenie największych wirów (małe k). Dyssypacja energii na ciepło zachodzi głównie przez małe wiry (duże k). W stanie równowagi dynamicznej prędkość dyssypacji jest równa prędkości, z jaką energia jest dostarczana do układu przez mieszanie.

• Jeśli mieszanie jest wystarczająco intensywne, w pewnym zakresie widma (w tzw. obszarze inercyjnym) przepływ energii jest niezależny zarówno od mieszania, jak i od lepkości.

Dla zweryfikowania hipotezy Mandelbrota wyprowadzimy, za pomocą uproszczonego modelu przepływu energii, postać widma energii w obszarze inercyjnym. Zakładać będziemy, że obszar turbulentny ma wymiar D . Porównanie rezultatu naszych rozważań z wynikami doświadczeń pozwoli otrzymać liczbową wartość D .

Przyjmijmy, że wiry o rozmiarach l_0 rozpadają się na wiry o rozmiarach $l_1 = \frac{1}{2} l_0$, te zaś na wiry o rozmiarach $l_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 l_0$ itd. Wiry n -tego rzędu będą miały rozmiary $l_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n l_0$. Jeśli obszar, w którym skupiona jest turbulencja, jest fraktalem, to wiry nie będą wypełniały całej przestrzeni. Przyjmijmy więc, że wir n -tego rzędu rozpada się na N wirów rzędu $n+1$, przy czym $N < 2^3$ (rys. 6).



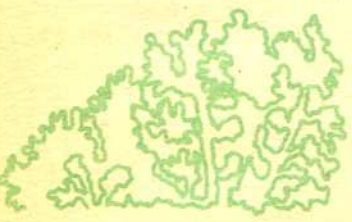
Rys. 6. Schematyczne przedstawienie rozpadania się wirów.

W ten sposób wiry rzędu $n+1$ będą zajmować ułamek $\beta = \frac{N}{2^3}$ przestrzeni zajmowanej przez wiry rzędu n , a wiry rzędu n ułamek β^n przestrzeni zajmowanej przez wiry zerowego rzędu. Zbiór, na którym skupione będą najmniejsze wiry, będzie w przybliżeniu fraktalem o wymiarze podobieństwa $D = \frac{\log N}{\log 2}$.

Proste rozważania przedstawione obok pozwalają wyprowadzić w powyższym modelu kształt widma energii w obszarze inercyjnym:

$$E(k) \sim \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-5/3} (k l_0)^{-(1/3)\mu},$$

gdzie $\mu = 3 - D$, ε — szybkość wprowadzania energii do układu. Można łatwo sprawdzić, że wynik ten jest rozsądny. Jeśli przyjrzymy $\beta = 1$, tzn. że wiry każdego rzędu wypełniają całą przestrzeń, to $D = 3$ i otrzymamy widmo



Niech v_n będzie charakterystyczną prędkością cząstek płynu w wirach rzędu n (w układzie odniesienia, w których wir spoczywa). Energia kinetyczna na jednostkę objętości niesiona przez te wiry ma postać

$$(1) \quad E_n \sim \beta^n v_n^2.$$

Założmy, że w czasie jednego „obrotu” wiru rzędu n przekazuje on znaczną część swojej energii wirom rzędu $n+1$.

„Okres obrotu” wiru $t_n \sim \frac{l_n}{v_n}$, a więc szybkość przepływu energii od wirów rzędu n do wirów rzędu $n+1$ będzie

określona przez $\varepsilon_n \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \beta^n \frac{v_n^3}{l_n}$. Z definicji obszaru inercyjnego wynika, że szybkość przepływu energii ε_n jest

równa szybkości ε , z jaką energia jest wprowadzana do układu. Mamy więc $\varepsilon_n \sim \varepsilon \sim \beta^n \frac{v_n^3}{l_n}$, a stąd $v_n \sim \varepsilon^{1/3} l_n^{1/3} \beta^{-n/3}$.

Po podstawieniu do (1)

$$(2) \quad E_n \sim \varepsilon^{2/3} l_n^{2/3} \beta^{n/3} \sim \varepsilon^{2/3} k_n^{-2/3} \beta^{n/3}.$$

Ale $\beta = \frac{N}{2^3}$, $N = 2^D$, więc $\beta = 2^{D-3}$ i $\beta^{n/3} = (2^n)^{\frac{D-3}{3}} = \left(\frac{2^n}{l_0}\right)^{\frac{D-3}{3}} = (k_n l_0)^{\frac{D-3}{3}}$.

Po podstawieniu do (2) otrzymujemy: $E_n \sim \varepsilon^{2/3} k_n^{-2/3} (k_n l_0)^{-1/3(D-3)}$.

E_n wiąże się z widmem energii $E(k)$ zależnością $E_n = \int_{k_n} E(k) dk$, czyli $E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} (k l_0)^{-1/3(D-3)}$.

Taką postać widma dla turbulencji jednorodnej w całej przestrzeni można otrzymać posługując się wyłącznie argumentami wymiarowymi — jedyną funkcją ε i k , która ma wymiar $E(k)$, jest $\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$. Okazuje się, że przy odpowiednio intensywnym mieszaniu w widmach otrzymanych z doświadczeń rzeczywiście występuje obszar potęgowej zależności od k (co potwierdza słuszność przyjętego modelu przepływu energii) z wykładnikiem mniejszym od $-5/3$ (co potwierdza hipotezę Mandelbrota). Dane doświadczalne dają $\mu \simeq 0,5$, czyli wymiar fraktala $D \simeq 2,5$.

Jak widać, poprawka do rezultatu Kołmogorowa nie jest duża. Na szczęście współczynnik μ pojawia się również w innych charakterystykach turbulencji, które znacznie lepiej rozróżniają turbulencję wypełniającą całą przestrzeń od turbulencji na fraktalu. Pomiary i tym razem potwierdzają niesprzeczność hipotezy Mandelbrota. Zgodność wyników otrzymanych w różnych sytuacjach eksperymentalnych pokazuje również, że wymiar fraktala nie zależy od sposobu, w jaki został wygenerowany (np. nie zależy od intensywności mieszania), tzn. jest uniwersalną wielkością charakteryzującą turbulencję izotropową.

Czytelnicy proponują

Nasz Czytelnik Zbigniew Czesak z Krakowa zadał nam następujące pytanie:

Do trójkąta ABC dopisano trzy trójkąty równoboczne ABC' , $AB'C$ i $A'BC$ jak na rysunku. Czy znając tylko punkty A' , B' , C' , można znaleźć punkty A , B , C ?

Można. Najpierw znajdujemy punkt P , z którego widać każdy z odcinków $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$ pod kątem 120° , a następnie na każdej z półprostych $A'P$, $B'P$ i $C'P$ odłożyć odcinek o długości $\frac{1}{2}(A'P + B'P + C'P)$. Końce tych odcinków to szukane punkty A , B i C .

Powstają dwa pytania. Po pierwsze — jak znaleźć punkt P (i kiedy go znaleźć można)? Tu należy posłużyć się łukami Talesa (piszemy o nich w numerze). Po drugie — skąd wiadomo, że proponowana konstrukcja jest poprawna? W tym pomaga rozwiązanie problemu Fermata (też podane w numerze).

