Ułamkowy wymiar

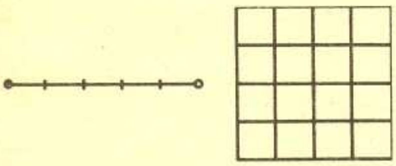
Dr *Jerzy* RYLL

Odcinkiem jest tu dla nas zbiór liczb spełniających nierówność $a \leqslant x < b$, kwadratem zbiór takich punktów (x, y), że $a_1 \leqslant x < b_1$, $a_2 \leqslant y < b_2$; analogicznie z sześcianem. Takie dobieranie punktów brzegowych jest konieczne, aby podział, o którym mowa, był możliwy.

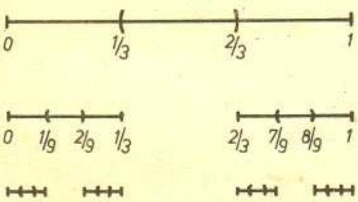
Co to znaczy, że wymiar odcinka jest 1, wymiar kwadratu 2, a sześcianu 3? Pisaliśmy w *Delcie* 5/1983 o wymiarze topologicznym. Okazuje się, że na wymiar wyżej wymienionych figur można spojrzeć inaczej i to inne podejście do ich wymiaru ma uogólnienia znajdujące zastosowanie między innymi w fizyce. Otóż odcinek da się podzielić na $n = n^1$ odcinków podobnych do wyjściowego w stosunku $\frac{1}{n}$, kwadrat można podzielić na n^2 części podobnych w stosunku $\frac{1}{n}$ do całego kwadratu. Dla sześcianu otrzymamy n^3 takich części.

Może więc określić wymiar figury jako taką liczbę D, że całą figurę można podzielić na $N = n^D$ części podobnych w stosunku $r = \frac{1}{n}$ do całej figury. (Zauważmy, że jeśli taki podział jest możliwy, to można też podzielić figurę na N^k części podobnych w stosunku r^k). Mamy wtedy $D = \ln N / \ln \frac{1}{r}$. Żądamy tu oczywiście, by liczba N była naturalna, natomiast liczba n może nie być całkowita. Okazuje się, że tak zdefiniowany wymiar (wymiar podobieństwa) ma dobre własności, aczkolwiek jest określony dla wąskiej klasy zbiorów, nazywanych figurami samopodobnymi.

Zobaczmy, jaki wymiar (w powyższym sensie) ma nieco mniej typowa figura, jaką jest zbiór Cantora. Zbiór Cantora otrzymujemy z odcinka [0,1] wyrzucając z niego środkowy odcinek o długości $\frac{1}{3}$ $\left(\text{tzn. } \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$, następnie z każdego z pozostałych odcinków wyrzucamy znów środkowe trzecie części $\left(\text{tzn. } \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right)$ i kontynuujemy ten proces w nieskończoność (rys. 2). To, co pozostało po wyrzuceniu wszystkich tych odcinków, jest zbiorem Cantora. Oczywiście każda „połówka" zbioru Cantora $\left(\text{tzn. jego części zawarte w odcinkach } \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ i } \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ jest podobna do całego zbioru w stosunku $\frac{1}{3}$. Tak więc wymiar podobieństwa zbioru Cantora jest równy $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ — nie jest zatem liczbą całkowitą!



Rys. 1



Rys. 2

Wymiar podobieństwa pozwala więc precyzyjniej rozróżniać figury, niż wymiar topologiczny. Wymiar topologiczny zbioru Cantora jest równy 0 — jest taki sam jak wymiar punktu czy ciągu punktów.

Oto dwie inne figury, dla których można obliczyć wymiar podobieństwa. Ich konstrukcja jest przykładem bardziej ogólnej sytuacji. Otóż, bierzemy łamaną o równych odcinkach i każdy jej odcinek zastępujemy łamaną podobną do danej w ustalonym stosunku. Krok taki powtarzamy nieskończenie wiele razy (stosunek podobieństwa łamanych wstawianych w kolejnych krokach jest stały).

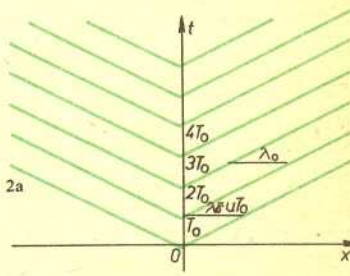
2. Zjawisko Dopplera

Załóżmy, że w jednorodnym ośrodku znajduje się nieruchome względem niego źródło fal (np. źródło dźwięku w powietrzu) o okresie T_0. Niech ponadto układ odniesienia związany z ośrodkiem będzie inercjalny.

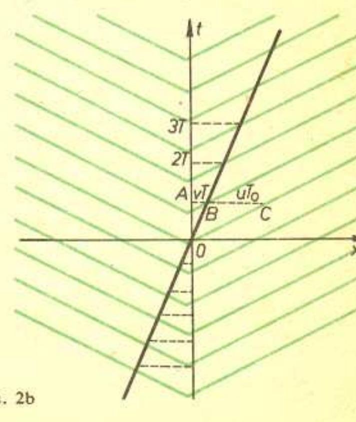
Przedstawmy źródło i fale na dwuwymiarowym diagramie czasoprzestrzennym. Linia świata źródła spoczywającego w $x = 0$ pokrywa się z osią czasu (rys. 2a). Co jeden okres, tj. w punktach 0, T_0, $2T_0$ ... opuszcza źródło maksimum fali. Maksima przesuwają się w obu kierunkach naszego jednowymiarowego świata z prędkością u równą prędkości rozchodzenia się fal w ośrodku. Linie świata maksimów są równoległymi półprostymi o kierunku wyznaczonym przez prędkość u (oraz przyjęte jednostki czasu i odległości). Długość fali λ_0 jest równa odległości między maksimami fal, mierzonej wzdłuż linii $t = \text{const}$.

Niech teraz fale emitowane przez źródło rejestruje obserwator poruszający się ruchem jednostajnym z prędkością v względem ośrodka (np. pasażer pociągu przejeżdżającego w pobliżu źródła dźwięku).

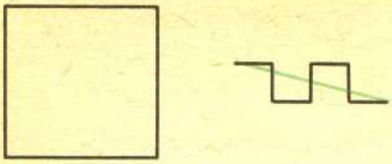
Jaki okres fali zarejestruje? Załóżmy, że obserwator mija źródło w chwili $t = 0$. Na rysunku 2b przedstawiona jest cała historia



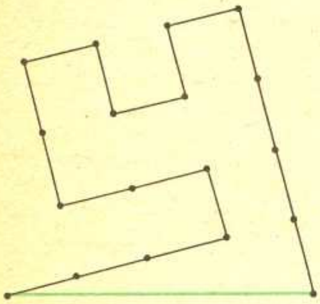
Rys. 2a



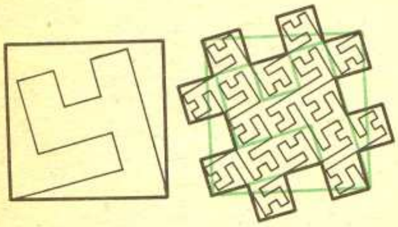
Rys. 2b



Rys. 3



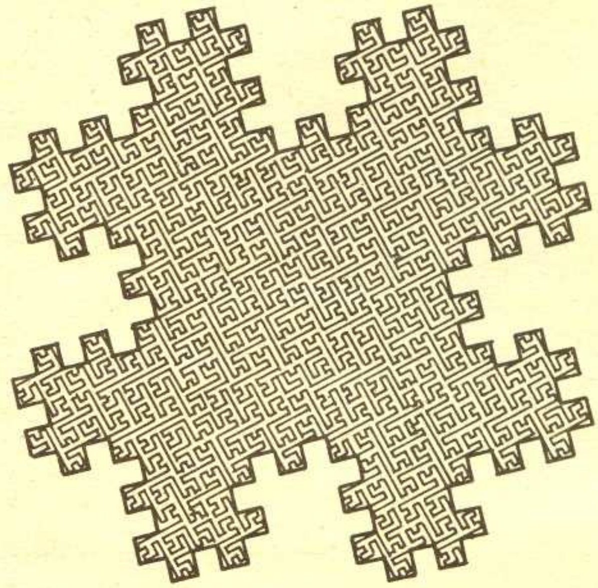
Rys. 4



Rys. 5

Pierwszą z wyjściowych łamanych będzie brzeg kwadratu (rys. 3a), którego odcinki będą zastępowane przez łamane o 7 odcinkach podobne do łamanych z rys. 3b, a drugą — łamana z rys. 4. Stosunek podobieństwa w obu przypadkach jest równy $\frac{1}{\sqrt{17}}$. Pierwsze dwa kroki przedstawione są na rys. 5 i 6. Kolorem zaznaczono łamaną otrzymaną z kwadratu. Wyraźnie widać, że łamana kolorowa mniej wypełnia płaszczyznę niż ta druga. Oczywiście długość obu łamanych jest nieskończona.

Wymiar podobieństwa krzywej czarnej, bardziej wygiętej, jest równy 2 — możemy ją podzielić na 17 części podobnych w stosunku $\frac{1}{\sqrt{17}}$. Natomiast krzywa kolorowa ma wymiar podobieństwa $\log 7/\log \sqrt{17} \approx 1{,}37$. Jak już powiedzieliśmy, wymiar podobieństwa da się określić tylko dla figur samopodobnych. Można go nieco uogólnić, jeśli dopuścić podział figury na figury samopodobne (z tym samym N i r) — tak trzeba zrobić z kolorową krzywą z poprzedniego przykładu. Okazuje się, że wymiar podobieństwa jest szczególnym przypadkiem wymiaru Hausdorffa, który daje się określić dla dowolnego zbioru w przestrzeni euklidesowej.

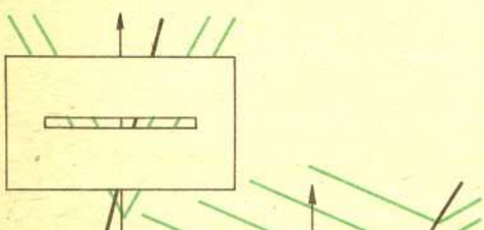


Rys. 6

Wymiar Hausdorffa zbioru nigdy nie jest mniejszy od wymiaru topologicznego tego zbioru. Jeśli nie jest mu równy, to zbiór nazywamy fraktalem (od łacińskiego fractus — złamany). Fizycy próbują stosować fraktale do opisu turbulencji.

Wymiar Hausdorffa jest pojęciem metrycznym. Zbiory homeomorficzne mogą mieć różny wymiar Hausdorffa. To samo dotyczy wymiaru podobieństwa.

Wykazać, że dla dowolnej liczby $D \in [0,2]$ istnieje fraktal o wymiarze D (dla $D \in [0,1]$ można zmodyfikować konstrukcję zbioru Cantora).



Rys. 2c

Czytanie diagramu czasoprzestrzennego może ułatwić kartonik z wąskim wycięciem. Przesuwając wycięcie prostopadle do osi czasu oglądamy swego rodzaju jednowymiarowy film animowany: maksima fal opuszczają źródło, dochodzą do obserwatora i mijają go.

obserwatora i maksimów fal. Natychmiast można zauważyć, że obserwator zbliżający się do źródła ($t < 0$) zarejestruje falę o okresie T krótszym od T_0, natomiast obserwator oddalający się ($t > 0$) zarejestruje falę o okresie dłuższym od T_0.
Okres T jest równy współrzędnej czasowej punktu B (rys. 2b). Łatwo zauważyć, że: $AB = vT$, $BC = \lambda_0 = uT_0$ i $AC = uT$, a stąd $vT + uT_0 = uT$, czyli $T = T_0 \frac{1}{1-\frac{v}{u}}$.

Na diagramie 2c obserwator spoczywa względem ośrodka, a źródło porusza się ze stałą prędkością w. Prędkość rozchodzenia się fal jest taka sama jak w poprzednim przypadku. Okres fali zarejestrowanej przez obserwatora (dla $t > 0$) jest teraz równy:

$$T = T_0\left(1 + \frac{w}{u}\right).$$

Czytelnikowi pozostawiamy do rozważenia trudniejsze przypadki:
(1) źródło i obserwator poruszają się względem ośrodka,
(2) obserwator porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym,
(3) prędkość obserwatora jest większa od prędkości fali,
obserwator i źródło spoczywają, a fala odbija się od zwierciadła poruszającego się z prędkością równoległą do prędkości fali.

(cdn.)