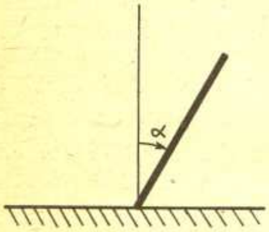
Zadania z fizyki nr 3, 4

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



3. Cienki, sztywny, jednorodny pręt, stojący pionowo na idealnie gładkim, poziomym podłożu, zostaje minimalnie wychylony z położenia równowagi i puszczony. Obliczyć przyspieszenie kątowe pręta jako funkcję kąta α (rysunek) podczas jego upadku. Jaki tor zakreśli środek masy pręta? Czy pręt, jeśli będzie dostatecznie kruchy, może ulec złamaniu, zanim upadnie na podłoże? Jaki będzie ruch pręta po idealnie sprężystym zderzeniu z podłożem?

4. Do wykrywania i lokalizacji zanurzonych okrętów podwodnych używany jest sonar, w którym wykorzystuje się odbicie fali akustycznej od powierzchni okrętu. Okazuje się, że w wodach tropikalnych zasięg sonaru, niezależnie od mocy i czułości urządzeń, jest często ograniczony do odległości zaledwie 1 km. Wyjaśnić to zjawisko.

Można inaczej

Oto inny niż można znaleźć w podręcznikach sposób obliczenia $\lim \sqrt[n]{n}$. Korzysta się z tego, iż ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny oraz z tego, iż podciąg ciągu zbieżnego ma tę samą granicę co cały ciąg.

Ciąg $(\sqrt[n]{n})_{n=3}^{\infty}$ jest ograniczony z dołu (oczywiste) i malejący (dowód indukcyjny poniżej), a więc zbieżny do pewnej liczby g.

Podciąg wyrazów o parzystych indeksach $(\sqrt[2n]{2n})_{n=2}^{\infty}$ ma tę samą granicę g. Ale

$$\sqrt[2n]{2n} = \sqrt{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}.$$

Ciąg po prawej stronie ma granicę g, ciąg po lewej granicę $\sqrt{1\cdot g}$ (tu trzeba wiedzieć dodatkowo, że $\lim \sqrt[n]{2} = 1$, można to też uprzednio udowodnić powyższą metodą). Tak więc

$$g = \sqrt{g},$$

czyli $g = 0$ lub $g = 1$. Wszystkie wyrazy naszego ciągu są jednak większe niż 1, a więc pozostaje tylko możliwość $g = 1$.

Mamy pokazać jeszcze, że ciąg $(\sqrt[n]{n})_{n=3}^{\infty}$ jest monotoniczny. Nierówność $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ jest równoważna nierówności $n^{n+1} > (n+1)^n$.

a ta z kolei $n > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Dla $n = 3$ mamy oczywiście $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27} < 3$.

Jeśli teraz $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < n$, to

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1,$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego, a zarazem monotoniczności naszego ciągu.

Rozwiązanie zadania F 166. Śmigłowiec utrzymuje się nad ziemią dzięki odrzucanemu w dół strumieniowi powietrza. W czasie Δt śmigło odrzuca w dół powietrze zawarte w objętości $Sv\Delta t$, gdzie S — powierzchnia zakreślana przez śmigło, a v — prędkość strumienia powietrza. Zmiana pędu powietrza o gęstości d wynosi $\Delta p = d\cdot S\cdot v^2\cdot\Delta t$. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na śmigłowiec działa więc siła

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = dSv^2.$$

Siła F musi równoważyć siłę ciężkości Mg (M — masa śmigłowca), a więc $Mg = dSv^2$, otrzymujemy stąd:

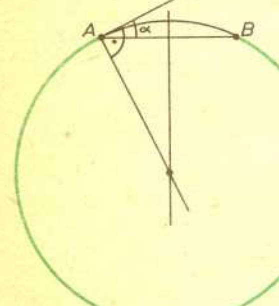
$$v = \sqrt{\frac{Mg}{S\cdot d}}.$$

Możemy teraz obliczyć moc P silnika: $P = Fv = dSv^3$. Zwiększenie rozmiarów L razy zwiększa masę L^3 razy, a powierzchnię L^2 razy. Stosunek mocy silnika modelu P_m i śmigłowca P wynosi

$$\frac{P}{P_m} = \frac{S}{S_m}\left(\frac{MS_m}{M_mS}\right)^{3/2} = \left(\frac{L}{L_m}\right)^{7/2}$$

(indeks m oznacza wielkości charakteryzujące model). Dla wartości podanych w zadaniu $P = 30\ \mathrm{W}\cdot 10^{7/2} \approx 9{,}5\cdot 10^4\ \mathrm{W}$.

Łuki Talesa



jest to miejsce geometryczne punktów, z których widać dany odcinek pod danym kątem. Są to dwa łuki okręgów symetryczne względem danego odcinka. Jeden z nich znajduje się tak:

Odkładamy dany kąt α tak, by jednym z jego ramion był dany odcinek AB. Przez wierzchołek kąta prowadzimy prostopadłą do drugiego ramienia. Z punktu przecięcia tej prostopadłej z symetralną odcinka AB zakreślamy okrąg przechodzący przez A. Gdy $\alpha < 90°$, rozwiązaniem jest większy z łuków, na jakie punkty A, B dzielą okrąg, gdy $\alpha > 90°$ — mniejszy.

Chyba każdy z Czytelników z łatwością uzasadni poprawność tej konstrukcji.